

И. М. ХАЛАТНИКОВ

# ТЕОРИЯ СВЕРХТЕКУЧЕСТИ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1971

**Теория сверхтекучести. И. М. Халатников. Монография.**  
Главная редакция физико-математической литературы, Изд-во «Наука», 1971.

Монография посвящена изложению современного состояния теории сверхтекучести. В первых главах рассмотрены вопросы, связанные с формой спектра элементарных возбуждений в сверхтекучем гелии. Эти вопросы являются основными в теории. В дальнейшем выводятся уравнения двухкомпонентной гидродинамики и с их помощью исследуется распространение звука и разрывов в сверхтекучей жидкости. Подробно изложена теория кинетических явлений в гелии II. Рассмотрены также гидродинамика вращающейся сверхтекучей жидкости и теория растворов посторонних частиц в гелии. Теория ферми-жидкости и теория ферми-бозе систем тесно связаны с теорией сверхтекучести и также включены в книгу. В последней главе изложены современные представления о движении заряженных частиц в жидком гелии. Автор книги внес значительный вклад в развитие теории сверхтекучести.

Книга рассчитана на научных работников и инженеров, а также может служить учебным пособием для аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся в области теоретической физики и физики твердого тела.

Рис. 14, библи. 59.

Исаак Маркович Халатников

ТЕОРИЯ СВЕРХТЕКУЧЕСТИ

М., 1971 г., 320 стр. с илл.

Редактор И. А. Фомин

Техн. редактор Л. А. Пыжова      Корректор М. Л. Медведская

Сдано в набор 19/IV 1971 г.      Подписано к печати 17/VIII 1971 г.  
Бумага 84×108/32      Физ. печ. л. 10.      Условн. печ. л. 16,8.  
Уч.-изд. л. 15,45      Тираж 5000 экз. Т-14311      Цена книги 1 р. 18 к.      Зак. № 2459

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы  
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	7
Г л а в а I. Квантовая жидкость и сверхтекучесть . . . . .	9
§ 1. Возбуждения в сверхтекучей жидкости . . . . .	9
§ 2. Сверхтекучее и нормальное движения . . . . .	13
§ 3. Термодинамические функции гелия II . . . . .	17
§ 4. Нормальная плотность . . . . .	20
Г л а в а II. Энергетический спектр квантовой жидкости . . . . .	23
§ 5. Квантование движения жидкости . . . . .	23
§ 6. Связь энергетического спектра возбуждений со структурным фактором сверхтекучего гелия . . . . .	26
§ 7. Энергетический спектр слабо неидеального бозе-газа . . . . .	33
Г л а в а III. Форма спектра элементарных возбуждений вблизи особых точек . . . . .	38
§ 8. Распад возбуждений . . . . .	38
§ 9. Свойства спектра вблизи порога рождения фонона . . . . .	40
§ 10. Свойства спектра вблизи порога распада на два возбуждения с не равными нулю параллельными импульсами . . . . .	42
§ 11. Распад на два возбуждения, вылетающие под углом друг к другу . . . . .	44
Г л а в а IV. Взаимодействие элементарных возбуждений . . . . .	46
§ 12. Квантование поля фононов . . . . .	46
§ 13. Рассеяние фонона фононом . . . . .	49
§ 14. Рассеяние фонона ротонном . . . . .	54
§ 15. Рассеяние ротона ротонном . . . . .	56
§ 16. Поглощение и испускание фононов и ротоннов . . . . .	59

Глава V. Гидродинамика сверхтекучей жидкости . . . . .	63
§ 17. Вывод уравнений двухскоростной гидродинамики . . . . .	63
§ 18. Диссипативные члены в гидродинамических уравнениях . . . . .	71
§ 19. О гидродинамических флуктуациях в сверхтекучей жидкости . . . . .	74
Глава VI. Распространение звука в сверхтекучей жидкости . . . . .	77
§ 20. Первый и второй звуки . . . . .	77
§ 21. Излучение звука в сверхтекучей жидкости . . . . .	82
§ 22. Отражение звука от границы между жидким гелием и его паром . . . . .	84
§ 23. Поглощение звука . . . . .	87
§ 24. Четвертый звук . . . . .	90
§ 25. Капиллярные волны . . . . .	91
Глава VII. Разрывы в сверхтекучей жидкости . . . . .	93
§ 26. Условия на поверхности разрывов . . . . .	93
§ 27. Разрывы небольшой интенсивности . . . . .	95
§ 28. Разрывы давления (ударные волны) . . . . .	98
§ 29. Температурные разрывы . . . . .	98
Глава VIII. Гидродинамика вращающейся сверхтекучей жидкости . . . . .	101
§ 30. Квантованные вихри . . . . .	101
§ 31. Анализ движения вращающейся сверхтекучей жидкости . . . . .	104
§ 32. Уравнения гидродинамики вращающейся сверхтекучей жидкости . . . . .	108
Глава IX. Гидродинамика сверхтекучей жидкости вблизи $\lambda$ -точки . . . . .	115
§ 33. Условие равновесия вблизи $\lambda$ -точки в неоднородном случае . . . . .	115
§ 34. Уравнения гидродинамики вблизи $\lambda$ -точки . . . . .	118
§ 35. О механизме релаксации вблизи $\lambda$ -точки . . . . .	121
§ 36. Дисперсия звука . . . . .	123
Глава X. Кинетические явления в сверхтекучей жидкости . . . . .	128
§ 37. Кинетическое уравнение для элементарных возбуждений . . . . .	128
§ 38. Кинетические коэффициенты . . . . .	132
§ 39. Теплопроводность . . . . .	135
§ 40. Первая вязкость . . . . .	141

Глава XI. Дисперсия и поглощение звука . . . . .	144
§ 41. Медленные процессы установления равновесия в газе возбуждений . . . . .	144
§ 42. Кинетические уравнения . . . . .	149
§ 43. Первый звук . . . . .	159
§ 44. Второй звук . . . . .	163
§ 45. Область температур выше $1,2^\circ \text{K}$ . . . . .	168
§ 46. Область температур ниже $0,6^\circ \text{K}$ . . . . .	172
§ 47. Кинетические коэффициенты . . . . .	176
§ 48. Звук в жидком гелии II вблизи абсолютного нуля . . . . .	182
Глава XII. Теплообмен между твердым телом и сверхтекучим гелием . . . . .	185
§ 49. Квантование упругих волн . . . . .	186
§ 50. Излучение энергии колеблющейся поверхностью твердого тела . . . . .	191
§ 51. Обмен энергией при соударениях ротонов и фононов с твердой стенкой . . . . .	195
§ 52. Теплообмен между твердым телом и жидким гелием II . . . . .	202
§ 53. Прохождение второго звука через металлические пластины. Поглощение второго звука на стенках цилиндрического сосуда . . . . .	205
Глава XIII. Растворы посторонних частиц в сверхтекучем гелии II . . . . .	211
§ 54. Термодинамика растворов . . . . .	211
§ 55. Уравнения гидродинамики растворов . . . . .	214
§ 56. Диссипативные процессы в растворах . . . . .	219
§ 57. Звук в растворах посторонних частиц в гелии II . . . . .	223
Глава XIV. Теория ферми-жидкости . . . . .	228
§ 58. Введение . . . . .	228
§ 59. Энергия возбуждений . . . . .	229
§ 60. Эффективная масса . . . . .	231
§ 61. Теплоемкость и энтропия . . . . .	232
§ 62. Магнитная восприимчивость . . . . .	234
§ 63. Кинетическое уравнение . . . . .	236
§ 64. Вязкость . . . . .	238
§ 65. Теплопроводность . . . . .	246
§ 66. Звук . . . . .	251
§ 67. Дисперсия и поглощение звука . . . . .	259
§ 68. Рассеяние света (флуктуации функции распределения) . . . . .	264

Глава XV. Микроскопическая теория ферми-жидкости . . . . .	273
§ 69. Разреженный ферми-газ . . . . .	273
§ 70. Микроскопическая теория ферми-жидкости при $T = 0$ . . . . .	280
§ 71. О возможности сверхтекучести в $\text{He}^3$ . . . . .	286
Глава XVI. Теория ферми-бозе квантовых жидкостей . . . . .	293
§ 72. Энергия возбуждения . . . . .	294
§ 73. Равновесная функция распределения . . . . .	297
§ 74. Нормальная плотность и теплоемкость . . . . .	298
§ 75. Закон сохранения импульса и энергии . . . . .	299
§ 76. Первый и второй звуки . . . . .	302
§ 77. Нуль-звук . . . . .	305
§ 78. Два определения энергии возбуждения . . . . .	306
§ 79. Замечание об учете спина . . . . .	312
Глава XVII. Движение электрических зарядов в жидком гелии . . . . .	313
§ 80. Структура носителей электрических зарядов . . . . .	313
§ 81. Подвижности носителей тока . . . . .	315
§ 82. Подвижность зарядов в сильных полях или при низких температурах . . . . .	317
Цитированная литература . . . . .	319

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Со времени открытия П. Л. Капицей явления сверхтекучести в жидком гелии II прошло немногим более 30 лет. Можно без преувеличения сказать, что влияние этого открытия на всю макроскопическую физику было поистине революционным.

Объяснение этого явления, данное Л. Д. Ландау и основанное на оригинальном применении квантовых законов к макроскопическим системам, способствовало прогрессу всей теории твердого тела. Дальнейшее развитие физики твердого тела показало, что явление сверхтекучести не является чем-то исключительным и присущим только сверхтекучему гелию. По существу, в том или ином виде это явление обнаруживается во всех макроскопических системах в области действия квантовых законов. Так, в сверхпроводимости мы имеем дело со сверхтекучестью электронов в металлах.

Идеи и методы теории сверхтекучести оказали исключительное влияние и на другие разделы теоретической физики. Современная теория ядра широко использует представление о сверхтекучих свойствах ядерного вещества.

Настоящая книга посвящена изложению современного состояния теории сверхтекучести. Основные вопросы, относящиеся к теории сверхтекучести гелия II, были изложены в изданной в 1965 году книге автора «Введение в теорию сверхтекучести». Предлагаемая книга наряду с



более подробным изложением этих вопросов охватывает также теорию ферми-жидкости и теорию растворов ферми-бозе-жидкостей. Именно при изучении растворов ферми-бозе-жидкостей тесно переплетаются идеи теории сверхтекучести и теории ферми-жидкости. Главы XIV и XV написаны в сотрудничестве с А. А. Абрикосовым, которому автор приносит глубокую благодарность. Автор благодарит также Р. Г. Архипова за помощь при написании главы XVII и И. А. Фомина, прочитавшего рукопись и сделавшего ряд полезных замечаний.

*Автор*

## ГЛАВА I

### КВАНТОВАЯ ЖИДКОСТЬ И СВЕРХТЕКУЧЕСТЬ

#### § 1. Возбуждения в сверхтекучей жидкости

В жидком гелии при температуре  $2,18^{\circ}\text{K}$  происходит фазовый переход второго рода. Ниже  $\lambda$ -точки жидкий гелий (гелий II) обладает рядом необыкновенных свойств, наиболее замечательным из которых является сверхтекучесть, открытая П. Капицей [1]. Сверхтекучестью называют способность жидкого гелия II протекать без трения через узкие капилляры. Можно без труда убедиться в том, что дебройлевская длина волны атомов гелия при температурах порядка  $1\text{--}2^{\circ}\text{K}$  сравнима с межатомными расстояниями. Отсюда следует, что гелий II является существенно квантовым объектом. Таким образом, гелий II представляет собой не классическую, а квантовую жидкость. Как известно, имеется два устойчивых изотопа гелия —  $\text{He}^4$  и  $\text{He}^3$  с массами 4 и 3 в атомных единицах соответственно. Свойством сверхтекучести обладает жидкость, образованная из атомов  $\text{He}^4$ , т. е. из частиц, подчиняющихся статистике Бозе. Атомы  $\text{He}^3$  также образуют квантовую жидкость, которая, однако, в указанной выше области температур свойством сверхтекучести не обладает. Квантовую жидкость, образованную фермиевскими частицами, принято называть ферми-жидкостью. Таким образом, свойством сверхтекучести обладает лишь жидкость, состоящая из бозе-частиц.

В последнее время стало, однако, ясно, что в ферми-жидкости, состоящей из атомов  $\text{He}^3$ , при достаточно низких температурах должно происходить спаривание, т. е. образование частиц бозевского типа. А это должно сопровождаться возникновением сверхтекучести. Таким

образом, складывается впечатление, что свойство сверхтекучести присуще в том или ином виде всем квантовым жидкостям. Перечень макроскопических объектов, являющихся квантовыми жидкостями, ограничен лишь упомянутыми двумя жидкостями, образованными изотопами гелия \*). Однако со свойствами сверхтекучести мы встречаемся и в других объектах. Так, электроны в металлах при низких температурах могут образовывать пары, т. е. бозе-частицы, что приводит к сверхтекучести «электронной жидкости». Сверхтекучесть «электронной жидкости», поскольку эта жидкость заряжена, проявляется в форме сверхпроводимости. Таким образом, свойство сверхтекучести присуще различным квантовым объектам при низких температурах и не является столь экзотическим, как казалось раньше. Установление связи между явлением сверхтекучести и квантовыми свойствами системы и на этой основе последовательная теория этого явления были осуществлены Л. Ландау [2, 3]. Согласно классической механике при абсолютном нуле все атомы должны покоиться, а их потенциальная энергия должна иметь минимум. Следовательно, при низких температурах атомы могут совершать лишь малые колебания около некоторых положений равновесия, т. е. все тела при этом должны затвердевать, образуя кристаллическую решетку. Жидкий гелий — единственная жидкость, в которой квантовые эффекты проявляются раньше, чем жидкость затвердевает. Это объясняется относительно слабым взаимодействием атомов гелия. Во всех других средах взаимодействие атомов достаточно сильно, так что тела затвердевают до того, как проявятся квантовые эффекты. При абсолютном нуле система атомов, образующих твердое тело, находится в энергетически наинизшем (основном) состоянии. При отличных от нуля температурах система находится в возбужденном состоянии — атомы совершают колебания около положений равновесия. Энергия кристалла будет суммой энергий квантовых осцилляторов. Каждый из осцилляторов при этом может находиться в каком-либо из возбужденных состояний. Вместо того чтобы говорить

\*) Быстро распадающийся изотоп  $\text{He}^6$  мало изучен, однако, несомненно, жидкость из атомов  $\text{He}^6$  должна была бы обладать свойствами сверхтекучести.

об осцилляторе в  $n$ -м возбужденном состоянии, можно рассматривать  $n$  колебательных квантов. Эти кванты — фононы — соответствуют звуковым волнам, подобно световым квантам — фотонам, представляющим волны света. Таким образом, состояние системы характеризуется совокупностью длинноволновых звуковых квантов — фононов. Фононы обладают энергией, которая линейно связана с импульсом (точнее, «квазиимпульсом»). Используя представление о фононах, можно объяснить все свойства твердых тел при низких температурах. Ситуация, которую мы сейчас описали, не является исключительной в квантовой механике. Всякая система произвольно взаимодействующих частиц в слабовозбужденном состоянии может рассматриваться как совокупность отдельных элементарных возбуждений. Каждое элементарное возбуждение ведет себя подобно некоторой квазичастице, способной двигаться сквозь тело. Оно обладает определенной энергией и импульсом. Функцию, характеризующую зависимость энергии элементарного возбуждения от импульса, называют энергетическим спектром тела.

Обозначим через  $\varepsilon$  энергию элементарного возбуждения в жидком гелии как функцию импульса  $p$ . Вид энергетического спектра при малых значениях импульса  $p$  устанавливается легко. Малым импульсам соответствуют длинноволновые возбуждения, которые, как очевидно, в жидкости являются просто продолжными звуковыми колебаниями. Таким образом, соответствующие элементарные возбуждения представляют собой звуковые кванты — фононы. Энергия фононов является линейной функцией импульса:

$$\varepsilon = cp, \quad (1.1)$$

где  $c$  — скорость звука. По мере увеличения импульса кривая  $\varepsilon(p)$  отклоняется от линейности. Однако дальнейший ее ход не может быть получен из общих соображений. Л. Ландау для объяснения экспериментальных значений термодинамических величин жидкого гелия предложил изображенный на рис. 1 вид энергетического спектра. Дело в том, что одних фононов оказалось недостаточно для объяснения температурной зависимости и абсолютной величины таких термодинамических характеристик, как,

например, теплоемкость. Как легко видеть, элементарные возбуждения с энергией вблизи минимума на кривой рис. 1 будут давать конкурирующий с фононами вклад во все термодинамические величины. Соответствующие возбуждения были названы ротонами, и их энергия из общих

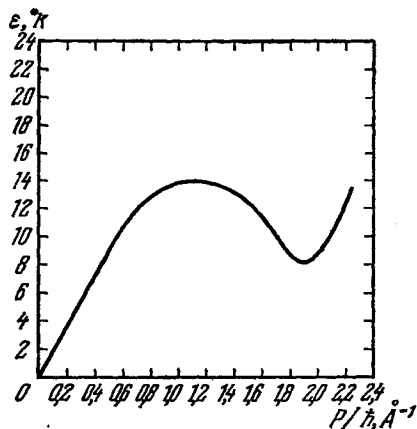


Рис. 1.

свойств функций вблизи минимума может быть представлена в виде

$$\varepsilon = \Delta + \frac{(p - p_0)^2}{2\mu}; \quad (1.2)$$

здесь  $p_0$  — значение импульса, при котором функция  $\varepsilon$  имеет минимум, равный  $\Delta$ . Точные значения параметров, характеризующих энергетический спектр гелия, найдены по рассеянию нейтронов жидким гелием. Монохроматические нейтроны в гелии поглощают (или испускают) элементарные возбуждения. Измеряя энергию рассеянных под данным углом нейтронов, можно восстановить весь спектр элементарных возбуждений. Таким образом получены следующие значения параметров спектра [4]:

$$\Delta = 8,6^\circ \text{ K}, p_0 = 1,9 \cdot 10^8 \text{ см}^{-1}, \mu = 0,16 m_{\text{He}}.$$

Величину  $\mu$ , имеющую размерность массы, обычно называют эффективной массой ротона.

Концепция элементарных возбуждений предполагает, что количество их невелико, так что энергия их взаимодействия между собой невелика по сравнению с их собственной энергией. В этом случае газ элементарных возбуждений можно рассматривать как идеальный газ. Поскольку при возбуждении жидкости фононы и ротоны могут появляться поодиночке, то очевидно, что они должны обладать целочисленным моментом и подчиняться статистике Бозе. Таким образом, фононный и ротонный газы описываются в равновесии равновесными функциями статистики Бозе. Что касается ротонов, то их энергия содержит большую величину  $\Delta$ , и поэтому распределение Бозе может быть заменено распределением Больцмана. Модель идеального газа возбуждений, таким образом, пригодна при температурах, не слишком близких к  $\lambda$ -точке. Вблизи  $\lambda$ -точки возбуждений много, и их взаимодействие становится существенным. Время жизни, определяемое их взаимными соударениями, становится малым, а неопределенность энергии возбуждений — сравнимой с их энергией. Поэтому концепция элементарных возбуждений вблизи  $\lambda$ -точки оказывается непригодной. Однако практически уже при температурах порядка  $1,7\text{—}1,8^\circ \text{ K}$  и ниже в гелии фононный и ротонный газы можно считать идеальными.

## § 2. Сверхтекучее и нормальное движения

Покажем теперь, как из приведенных представлений об элементарных возбуждениях в гелии следует свойство сверхтекучести. Вначале предположим, что гелий находится при абсолютном нуле температур, т. е. в основном энергетическом состоянии. Пусть жидкость теперь течет через капилляр со скоростью  $v$ . Если бы при этом жидкость испытывала трение, часть кинетической энергии диссипировала бы, превращалась в тепловую энергию. Нагревание гелия означало бы переход в возбужденное состояние. Но мы знаем, что квантовая жидкость не может получать энергию непрерывным образом. Для того чтобы такая жидкость перешла в ближайшее возбужденное состояние, в ней должно появиться элементарное возбуждение. Пусть энергия, которую имело бы возникающее возбуждение в движущейся вместе с жидкостью системе отсчета, равна

$\varepsilon(p)$ , а соответствующий импульс равен  $pv$ . Тогда в неподвижной системе отсчета энергия системы изменится на величину

$$\varepsilon(p) + pv. \quad (2.1)$$

Переход жидкости в возбужденное состояние будет энергетически выгоден в том случае, если выполнено условие

$$\varepsilon(p) + pv < 0. \quad (2.2)$$

Очевидно, что наиболее благоприятная для выполнения этого условия ситуация будет в том случае, когда импульс образованного возбуждения направлен противоположно скорости. В этом случае из (2.2) следует, что

$$v > \frac{\varepsilon(p)}{p}. \quad (2.3)$$

Очевидно, что возбуждение может возникать в жидком гелии, если условие (2.3) выполнено по крайней мере в точке спектра, где отношение  $\varepsilon(p)/p$  имеет минимальное значение. Таким образом, окончательно получаем условие, необходимое для рождения возбуждения:

$$v > \min \frac{\varepsilon(p)}{p}. \quad (2.4)$$

Для наличия сверхтекучести необходимо, чтобы

$$v_{кр} = \min \frac{\varepsilon(p)}{p} \neq 0. \quad (2.5)$$

Тогда при значениях скорости движения гелия, меньших критического значения  $v_{кр}$ , рождение возбуждения энергетически невыгодно, и жидкость движется без диссипации энергии, т. е. без трения. Течение жидкости без трения не будет замедляться, т. е. будет сверхтекучим. Наоборот, при скоростях, больших  $v_{кр}$ , движение гелия будет сопровождаться рождением возбуждений и, следовательно, диссипацией энергии. Спектр элементарных возбуждений жидкого гелия, как это видно из рис. 1, удовлетворяет условию (2.5). Минимум отношения  $\varepsilon/p$  осуществляется, как это следует из условия экстремума

$$\frac{d}{dp} \frac{\varepsilon}{p} = \frac{1}{p} \frac{d\varepsilon}{dp} - \frac{\varepsilon}{p^2} = 0,$$

в точке, где

$$\frac{\varepsilon}{p} = \frac{d\varepsilon}{dp}, \quad (2.6)$$

т. е. в точке, где прямая, проведенная из начала координат, касается кривой  $\varepsilon(p)$ . Для спектра жидкого гелия эта точка лежит недалеко от минимума кривой  $\varepsilon(p)$  и соответствует значению критической скорости около 60 м/сек. Это значение на несколько порядков превосходит реально наблюдающиеся значения критических скоростей в гелии II. Объяснение этого, по-видимому, состоит в том, что, как мы увидим, в сверхтекучем гелии, кроме фононов и ротонов, могут существовать возбуждения другого типа, так называемые квантованные вихри. Хотя эти возбуждения из-за малого статистического веса и не играют роли в термодинамике, они благодаря либеральным условиям их рождения играют роль в гидродинамике, определяя значение критических скоростей\*). Заметим, что при выводе критерия (2.4) нигде не использовалось то обстоятельство, что в жидкости отсутствуют готовые возбуждения. Наличие таких возбуждений не препятствовало бы выводу, и поэтому критерий (2.4) будет справедлив и при температурах, отличных от абсолютного нуля. Однако наличие возбуждений при не равных нулю температурах вносит определенное своеобразие в характер течения гелия II по капиллярам. Присутствующие в жидкости возбуждения будут отражаться от стенок и передавать им часть своего импульса. Благодаря этому та часть жидкости, которая увлекается движением возбуждений, будет вести себя как нормальная вязкая жидкость и будет тормозиться благодаря трению о стенки. Таким образом, при  $T = 0$  через капилляр протекает вся жидкость без трения, при  $T \neq 0$  — лишь часть. Получилась своеобразная ситуация: в сверхтекучей жидкости возможны одновременно два независимых движения. Часть жидкости, которая ув-

\*) Критическая скорость, связанная с рождением квантованных вихрей, зависит от диаметра капилляра; имеет место соотношение  $v_{кр} d \sim h/m$ . Поэтому так существенна для наблюдения сверхтекучести узость капилляра. В широких трубках значение  $v_{кр}$  чрезвычайно мало и наблюдение сверхтекучести невозможно.

лекается движением возбуждений, ведет себя как нормальная жидкость, остальная часть — сверхтекучая — не испытывает трения и, пока скорость не превосходит критического значения, движется независимо от нормальной части. Итак, в гелии II могут существовать одновременно два движения: сверхтекучее со скоростью  $v_s$  и нормальное со скоростью  $v_n$ . Каждому из этих движений соответствует своя эффективная масса. Сумма сверхтекучей и нормальной масс равна полной массе жидкости. Оба движения происходят независимо (по крайней мере в области малых значений скоростей  $v_s$  и  $v_n$ , не превосходящих некоторых критических значений), так что передача импульса от одного к другому невозможна. Импульс  $j$  единицы объема гелия II, таким образом, складывается из двух частей:

$$j = \rho_s v_s + \rho_n v_n. \quad (2.7)$$

Коэффициент  $\rho_n$  называют плотностью нормальной части жидкости, а  $\rho_s$  — плотностью сверхтекучей части жидкости. Сумма  $\rho_n$  и  $\rho_s$  равна плотности жидкости

$$\rho = \rho_n + \rho_s. \quad (2.8)$$

Отношение  $\rho_n/\rho$  в  $\lambda$ -точке равно единице; с понижением температуры оно убывает, стремясь к нулю при  $T = 0$ .

Пусть в гелии одновременно происходят два поступательных движения со скоростями  $v_n$  и  $v_s$ . Энергия элементарного возбуждения в неподвижной системе отсчета  $E(p)$  выражается через энергию  $\varepsilon(p)$  в системе отсчета, в которой сверхтекучая часть жидкости покоится, с помощью соотношения

$$E(p) = \varepsilon(p) + p v_s. \quad (2.9)$$

Нормальное движение жидкости связано с поступательным движением газа возбуждений, происходящим со скоростью  $v_n$ . Функция распределения  $n$  для элементарных возбуждений зависит от энергии относительного движения

$$E' = E - p v_n = \varepsilon(p) + p v_s - p v_n. \quad (2.10)$$

Таким образом, в движущемся гелии II распределение фононов по энергиям определяется функцией Планка

$$n = \left[ \exp \left( \frac{\varepsilon + p v_s - p v_n}{kT} \right) - 1 \right]^{-1} \quad (2.11)$$

с функцией  $\varepsilon$ , определяемой соотношением (1.1).

Распределение же ротонов по энергиям определяется функцией Больцмана

$$n = \exp \left( - \frac{\varepsilon + p v_s - p v_n}{kT} \right) \quad (2.12)$$

с функцией  $\varepsilon$ , определяемой соотношением (1.2).

### § 3. Термодинамические функции гелия II

Не очень близко к  $\lambda$ -точке плотности фононного и ротонного газов невелики, и, как уже говорилось, эти газы могут рассматриваться как идеальные. В этом случае все термодинамические функции складываются из двух частей: из части, связанной фононам, и части, связанной ротоном.

При вычислении термодинамических функций мы воспользуемся функциями распределения фононов и ротонов (2.11) и (2.12). При этом зависимостью функций распределения от относительной скорости  $v_n - v_s$  в первом приближении можно пренебречь. Указанная зависимость проявляется в области таких значений  $v_n - v_s$ , при которых в обычных условиях наступает нарушение сверхтекучести. Лишь при распространении в гелии II звука большой амплитуды удается достичь заметных значений относительной скорости  $v_n - v_s$ . В этом случае появляется необходимость учета квадратичных относительно разности  $v_n - v_s$  членов в термодинамических функциях.

Вычислим вначале термодинамические функции для покоящегося гелия II. Они могут быть получены с помощью формул статистики Бозе. Фононы, как известно, подчиняются статистике Бозе; распределение ротонов не зависит от типа статистики благодаря наличию в энергии ротона большого постоянного члена  $\Delta \gg kT$ .

Свободная энергия бозе-газа равна

$$F = -kT \int \ln(1 + n) d\tau_p \quad (3.1)$$

( $d\tau_p = \frac{p^2 dp do}{(2\pi\hbar)^3}$  — элемент объема в  $p$ -пространстве,  $do$  — элемент телесного угла). После однократного интегрирования по частям (3.1) получаем

$$F = -\frac{1}{3} \int n p \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} d\tau_p, \quad (3.2)$$

что дает возможность вычислить свободную энергию газа возбуждений. Энтропия возбуждений находится дифференцированием свободной энергии (3.2) по температуре:

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = -\frac{1}{3kT^2} \int n' \varepsilon p \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} d\tau_p \quad (3.3)$$

( $n'$  — производная функции распределения по аргументу).

Свободная энергия, энтропия и теплоемкость фононного газа. Выполнив в (3.2) интегрирование с функцией распределения (2.14), находим свободную энергию фононного газа ( $\varepsilon = cp$ ):

$$F_{ph} = -\frac{1}{3} \int \left( e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1 \right)^{-1} p \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} d\tau_p = -\frac{1}{3} E_{ph}. \quad (3.4)$$

Энергия  $E_{ph}$  фононов в единице объема гелия II равна

$$E_{ph} = \frac{4\pi^5}{15} \left( \frac{kT}{2\pi\hbar c} \right)^3 kT \approx \frac{\pi^4}{36} kT N_{ph} \quad (3.5)$$

( $N_{ph} = 2\zeta(3) 4\pi \left( \frac{kT}{2\pi\hbar c} \right)^3$  — число фононов в единице объема гелия II). Энтропия фононного газа находится или по общей формуле (3.3), или непосредственно дифференцированием выражения (3.4) для свободной энергии; таким путем находим

$$S_{ph} = -\frac{\partial F_{ph}}{\partial T} = \frac{16\pi^5}{45} k \left( \frac{kT}{2\pi\hbar c} \right)^3. \quad (3.6)$$

Далее вычисляем теплоемкость фононного газа:

$$C_{ph} = T \frac{\partial S_{ph}}{\partial T} = \frac{16\pi^5}{15} k \left( \frac{kT}{2\pi\hbar c} \right)^3. \quad (3.7)$$

Свободная энергия, энтропия и теплоемкость ротонного газа. Свобод-

ная энергия ротонного газа в единице объема гелия II находится по общей формуле (3.2) с функцией распределения (2.12). При интегрировании необходимо учитывать то обстоятельство, что импульсы ротонов по своей величине близки к  $p_0$ . Таким путем находим

$$F_r = -kTN_r, \quad (3.8)$$

где  $N_r$  — число ротонов в единице объема гелия:

$$N_r = \int n d\tau_p = \frac{2p_0^2 (\mu kT)^{1/2} e^{-\Delta/T}}{(2\pi)^{3/2} \hbar^3}.$$

Дифференцированием соотношения (3.8) находим энтропию ротонного газа:

$$S_r = -\frac{\partial F_r}{\partial T} = kN_r \left( \frac{\Delta}{T} + \frac{3}{2} \right). \quad (3.9)$$

Далее вычисляем теплоемкость ротонного газа

$$C_r = T \frac{\partial S_r}{\partial T} = kN_r \left( \frac{\Delta^2}{T^2} + \frac{\Delta}{T} + \frac{3}{4} \right). \quad (3.10)$$

Учитывая результаты (3.6), (3.7), (3.9) и (3.10), находим выражения для энтропии и теплоемкости единицы объема гелия II:

$$S = S_r + S_{ph} = kN_r \left( \frac{\Delta}{T} + \frac{3}{2} \right) + \frac{16\pi^5 k}{45} \left( \frac{kT}{2\pi\hbar c} \right)^3, \quad (3.11)$$

$$C = C_r + C_{ph} = kN_r \left( \frac{\Delta^2}{T^2} + \frac{\Delta}{T} + \frac{3}{4} \right) + \frac{16\pi^5 k}{15} \left( \frac{kT}{2\pi\hbar c} \right)^3. \quad (3.12)$$

Вычисления, аналогичные приведенным, могут быть произведены для случая не равной нулю относительной скорости  $w = v_n - v_s$ . Не останавливаясь на несложных выкладках, приведем окончательные выражения для термодинамических функций, получающихся в этом случае:

$$\bar{F}_{ph} = F_{ph} (1 - w^2/c^2)^{-2}, \quad (3.13)$$

$$\bar{F}_r = F_r \frac{kT}{p_0 w} \operatorname{sh} \frac{p_0 w}{kT}, \quad (3.14)$$

$$\bar{S}_{ph} = S_{ph} (1 - w^2/c^2)^{-2}, \quad (3.15)$$

$$\bar{C}_{ph} = C_{ph} (1 - w^2/c^2)^{-2}, \quad (3.16)$$

$$\bar{S}_r = S_r \frac{kT}{p_0 w} \operatorname{sh} \frac{p_0 w}{kT} + F_r \frac{1}{T} \left( \frac{kT}{p_0 w} \operatorname{sh} \frac{p_0 w}{kT} - \operatorname{ch} \frac{p_0 w}{kT} \right), \quad (3.17)$$

$$\bar{C}_r = C_r \frac{kT}{p_0 w} \operatorname{sh} \frac{p_0 w}{kT} + F_r \frac{1}{T} \frac{p_0 w}{kT} \operatorname{sh} \frac{p_0 w}{kT}. \quad (3.18)$$

$w = |\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s|$  есть относительная скорость нормального и сверхтекучего движений. Буквами без черты обозначаем значения термодинамических функций в покоящемся гелии II.

#### § 4. Нормальная плотность

Импульс единицы объема гелия II в системе отсчета, движущейся вместе со сверхтекучей частью, равен согласно (2.7)

$$\mathbf{p} = \mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_s = \rho_n (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s). \quad (4.1)$$

С другой стороны, этот импульс может быть представлен в виде интеграла

$$\int p_n (\varepsilon + \mathbf{p} \mathbf{v}_s - \mathbf{p} \mathbf{v}_n) d\tau_p, \quad (4.2)$$

взятого по всем элементарным возбуждениям. Сравнивая (4.1) и (4.2), получаем соотношение, определяющее величину нормальной плотности:

$$\rho_n (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) = \int p_n (\varepsilon + \mathbf{p} \mathbf{v}_s - \mathbf{p} \mathbf{v}_n) d\tau_p. \quad (4.3)$$

В случае малых значений разности  $(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)$  функцию распределения  $n$  можно разложить в ряд по степеням этой разности. Нулевой член разложения обращает интеграл в правой части в нуль. Первый член разложения дает

$$\rho_n = - \frac{1}{3kT} \int p^2 n' d\tau_p. \quad (4.4)$$

Формула (4.4) справедлива при малых значениях разности  $(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)$ .

Вычислим вначале фононную часть нормальной плотности. Подставив в (4.3) функцию распределения (2.11), получим

$$\rho_{nph} (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) = \int p \left[ \exp \left( \frac{\varepsilon + \mathbf{p} \mathbf{v}_s - \mathbf{p} \mathbf{v}_n}{kT} \right) - 1 \right]^{-1} d\tau_p. \quad (4.5)$$

Произведя несложное интегрирование и опустив общий множитель  $(\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s)$  в левой и правой частях (4.5), находим

$$\rho_{nph} = \frac{4}{3} \frac{E_{ph}}{c^2} (1 - w^2/c^2)^{-3}. \quad (4.6)$$

Произведем аналогичные вычисления для ротонов. Имеем

$$\rho_{nr} (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) = \int p \exp \left( - \frac{\varepsilon + \mathbf{p} \mathbf{v}_s - \mathbf{p} \mathbf{v}_n}{kT} \right) d\tau_p.$$

Отсюда без труда находим

$$\rho_{nr} = N_r \frac{kT}{w^2} \left( \operatorname{ch} \frac{p_0 w}{kT} - \frac{kT}{p_0 w} \operatorname{sh} \frac{p_0 w}{kT} \right). \quad (4.7)$$

Нормальная плотность гелия  $\rho_n$  равна сумме  $\rho_{nph}$  и  $\rho_{nr}$ . Согласно (4.6) и (4.7) имеем

$$\rho_n = N_r \frac{kT}{w^2} \left( \operatorname{ch} \frac{p_0 w}{kT} - \frac{kT}{p_0 w} \operatorname{sh} \frac{p_0 w}{kT} \right) + \frac{4}{3} \frac{E_{ph}}{c^2} (1 - w^2/c^2)^{-3}. \quad (4.8)$$

В случае малых значений скорости относительного движения нормальной и сверхтекучей частей зависимостью  $\rho_{nph}$  и  $\rho_{nr}$  от  $w = |\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s|$  можно пренебречь. Формулы (4.6) и (4.7) в этом случае дают

$$\rho_{nph} = \frac{4}{3} \frac{E_{ph}}{c^2}, \quad (4.9)$$

$$\rho_{nr} = \frac{p_0^2}{3kT} N_r, \quad (4.10)$$

$$\rho_n = \frac{4}{3} \frac{E_{ph}}{c^2} + \frac{p_0^2}{3kT} N_r. \quad (4.11)$$

В области температур выше  $0,8-1^\circ \text{K}$  ротонны играют основную роль во всех термодинамических функциях. Однако относительный вклад ротонов в величину указанных функций быстро убывает с убыванием температуры. Это объясняется тем, что ротонные части функций убывают с температурой по экспоненциальному закону, в то время как фононные убывают по степенному закону  $T^3$ .

Практически, как уже отмечалось, во всех задачах можно не учитывать зависимость термодинамических величин от скорости относительного движения  $w = v_n - v_s$ . Это объясняется тем, что в области скоростей, где наблюдается явление сверхтекучести, отношения  $w/c$  и  $wp_0/kT$  очень малы. Однако при рассмотрении задачи о распространении звука большой амплитуды указанной зависимостью пренебрегать уже нельзя. Наконец, заметим, что, поскольку  $c > \frac{kT}{p_0}$ , зависимость от  $w$  в большей степени сказывается для ротонных величин, чем для фононных.

## ГЛАВА II

### ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР КВАНТОВОЙ ЖИДКОСТИ

#### § 5. Квантование движения жидкости [2]

Классическая жидкость может быть описана заданием плотности  $\rho$  и вектора потока массы  $j$ , которые определяются следующим образом:

$$\rho = \sum m_a \delta(R - r_a), \quad (5.1)$$

$$j = \sum p_a \delta(R - r_a) = \sum m_a v_a \delta(R - r_a). \quad (5.2)$$

Суммирование производится по частицам системы,  $v_a$  и  $p_a$  — скорость и импульс частиц с массой  $m_a$ . При переходе к квантовой жидкости необходимо величинам  $\rho$  и  $j$  поставить в соответствие некоторые операторы.

Рассмотрим одну частицу массы  $m$ . Оператор  $\rho$  для этой частицы определяется таким образом, чтобы его среднее значение  $\int \psi^*(r) \rho \psi(r) dV$  равнялось  $m \psi^* \psi$ . Этому условию удовлетворяет оператор  $\rho = m \delta(R - r)$ . Аналогичным образом для системы частиц оператор  $\rho$  будет иметь по-прежнему вид (5.1).

Вектор потока согласно квантовой механике равен

$$\frac{\hbar}{2i} \{ \psi^*(R) \nabla \psi(R) - \psi(R) \nabla \psi^*(R) \}. \quad (5.3)$$

Снова для простоты рассмотрим классическую плотность потока для одной частицы  $j = p \delta(R - r)$ . Соответ-



ствующий симметризованный квантовый оператор равен

$$j = \frac{1}{2} \{p\delta(R-r) + \delta(R-r)p\}, \quad (5.4)$$

где  $p = \frac{\hbar}{i} \nabla$  — оператор импульса ( $\nabla$  действует на координату  $r$ ). Убедимся в том, что среднее значение оператора (5.4) равно (5.3). Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \int \psi^* j \psi dV &= \frac{\hbar}{2i} \int \psi^* \nabla \delta(R-r) \psi dV + \\ &+ \frac{\hbar}{2i} \int \psi^* \delta(R-r) \nabla \psi dV, \end{aligned}$$

или, после интегрирования по частям в первом члене,

$$\begin{aligned} \int \psi^* j \psi dV &= \frac{\hbar}{2i} \int \{-\psi \delta(R-r) \nabla \psi^* + \psi^* \delta(R-r) \nabla \psi\} = \\ &= \frac{\hbar}{2i} \{\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*\}, \end{aligned}$$

т. е. как раз выражение (5.3).

В общем случае произвольной системы частиц оператор потока равен сумме выражений (5.4) по всем частицам:

$$\begin{aligned} j &= \frac{1}{2} \sum [p_\alpha \delta(R-r_\alpha) + \delta(R-r_\alpha) p_\alpha], \quad (5.5) \\ p_\alpha &= \frac{\hbar}{i} \nabla_\alpha. \end{aligned}$$

В гидродинамике наряду с потоком  $j$  употребляется скорость  $v$ . Соответствующий квантовый оператор равен

$$v = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\rho} j + j \frac{1}{\rho} \right). \quad (5.6)$$

Соотношения коммутации между введенными операторами получаются непосредственным вычислением коммутаторов. Для примера приведем вычисление коммутатора  $j$  и  $\rho$ . Согласно (5.1) и (5.5) имеем

$$\begin{aligned} j_1 \rho_2 - \rho_2 j_1 &= \\ &= \sum \frac{m_\alpha \hbar}{2i} \{[\nabla_\alpha \delta(r_\alpha - R_1) + \delta(r_\alpha - R_1) \nabla_\alpha] \delta(r_\alpha - R_2) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- \delta(r_\alpha - R_2) [\nabla_\alpha \delta(r_\alpha - R_1) + \delta(r_\alpha - R_1) \nabla_\alpha] \} = \\ &= \sum \frac{m_\alpha \hbar}{i} \delta(r_\alpha - R_1) \nabla \delta(R_1 - R_2) = \frac{\hbar}{i} \rho_1 \nabla \delta(R_1 - R_2). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Аналогичным образом получают и другие соотношения коммутации (индексами 1 и 2 обозначаются значения операторов в точках  $R_1$  и  $R_2$ ):

$$\rho_1 \rho_2 - \rho_2 \rho_1 = 0, \quad (5.8)$$

$$v_1 \rho_2 - \rho_2 v_1 = \frac{\hbar}{i} \nabla \delta(R_1 - R_2), \quad (5.9)$$

$$v_{1i} v_{2k} - v_{2k} v_{1i} = \frac{\hbar}{i} \delta(R_1 - R_2) \frac{1}{\rho_1} (\text{rot } v)_{ik}. \quad (5.10)$$

Еще одно соотношение можно получить, применив операцию  $\text{rot}$  к левой и правой частям (5.9):

$$\text{rot } v_1 \rho_2 - \rho_2 \text{rot } v_1 = 0. \quad (5.11)$$

Применение полученных соотношений коммутации к макроскопическому движению приводит к уравнениям гидродинамики в операторном виде. Плотность энергии макроскопической системе равна

$$\frac{\rho v^2}{2} + E(\rho). \quad (5.12)$$

Макроскопический характер описания проявляется во втором члене в (5.12), который выражает внутреннюю энергию  $E(\rho)$  только как функцию плотности  $\rho$ . Соответствующий квантовый оператор имеет вид

$$\frac{v \rho v}{2} + E(\rho), \quad (5.13)$$

а функция Гамильтона системы равна интегралу

$$H = \int \left[ \frac{v \rho v}{2} + E(\rho) \right] dV. \quad (5.14)$$

Уравнения гидродинамики определяют производные по времени от переменных  $\rho$  и  $v$ . Для вычисления указанных производных образуем коммутатор из оператора

Гамильтона и соответствующих величин. Таким образом, имеем

$$\dot{\rho} = \frac{i}{\hbar} (H\rho - \rho H).$$

Подставив сюда оператор Гамильтона в форме (5.12), после несложных вычислений получаем уравнение непрерывности в операторном виде

$$\dot{\rho} + \operatorname{div} \frac{\rho v + v \rho}{2} = 0. \quad (5.15)$$

Аналогичным образом находим производную от скорости

$$\dot{v} = \frac{i}{\hbar} (Hv - vH),$$

откуда следует уравнение движения в операторной форме

$$\dot{v}_i + \left( v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} v_k \right) = - \frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (5.16)$$

где давление  $p$ , как и в классической жидкости, равно  $\rho^2 \frac{\partial E}{\partial \rho}$ .

## § 6. Связь энергетического спектра возбуждений со структурным фактором сверхтекучего гелия

Между формой энергетического спектра и структурным фактором жидкости имеется тесная связь (Фейнман [5]). Рассмотрим некоторое возбужденное состояние жидкости, состоящей из бозе-частиц. Будем искать  $\psi$ -функцию этого состояния в виде симметричной суммы

$$\sum f(r_a) \Phi, \quad (6.1)$$

взятой по всем атомам системы;  $f(r_a)$  есть некоторая функция радиуса-вектора атома номера  $a$ ,  $\Phi$  — волновая функция основного состояния, зависящая от координат всех атомов. Для нахождения функции  $f(r_a)$  применяем вариационный метод.

Запишем гамильтониан системы:

$$\hat{H} = - \frac{\hbar^2}{2m} \sum_a \nabla_a^2 + U - E_0, \quad (6.2)$$

где  $U$  — потенциальная энергия системы, а энергию отсчитываем относительно основного состояния  $E_0$ . Волновая функция основного состояния удовлетворяет поэтому уравнению

$$\hat{H}\Phi = 0. \quad (6.3)$$

Далее вводим функцию

$$\psi = F\Phi. \quad (6.4)$$

Поддействовав на функцию (6.4) гамильтонианом (6.2) и учитывая (6.3), получаем

$$\begin{aligned} \hat{H}\psi &= \hat{H}(F\Phi) = - \frac{\hbar^2}{2m} \sum_a (\Phi \nabla_a^2 F + 2 \nabla_a \Phi \nabla_a F) = \\ &= - \Phi^{-1} \frac{\hbar^2}{2m} \sum_a \nabla_a (\rho_N \nabla_a F); \end{aligned} \quad (6.5)$$

здесь  $\rho_N = \Phi^2$  есть плотность вероятности для основного состояния \*). Она определяет вероятность той или иной конфигурации  $r^N$  ( $r^N$  обозначает совокупность радиусов-векторов всех  $N$  атомов системы). Энергия системы находится как минимум выражения

$$\mathcal{E} = \int \psi^* \hat{H} \psi d^N r = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_a \int (\nabla_a F^* \cdot \nabla_a F) \rho_N d^N r \quad (6.6)$$

при дополнительном условии, что нормировочный интеграл

$$I = \int \psi^* \psi d^N r = \int F^* F \rho_N d^N r \quad (6.7)$$

имеет фиксированное значение. Энергия  $E$  равна  $\mathcal{E}/I$ . Согласно (6.1) функцию  $F$  записываем в виде суммы

$$F = \sum_a f(r_a) \quad (6.8)$$

\*)  $\psi$ -функция основного состояния не имеет узлов, поэтому может быть выбрана вещественной.

по всем атомам системы. Подставим это выражение в нормировочный интеграл (6.7)

$$I = \int \sum_a \sum_b f^*(r_a) f(r_b) \rho_N d^N r \quad (6.9)$$

и зафиксируем два каких-либо значения номеров атомов  $a$  и  $b$ . Затем проведем интегрирование в (6.9) по координатам всех остальных атомов; таким путем получим

$$I = \int f^*(r_1) f(r_2) \rho_2(r_1, r_2) dr_1 dr_2, \quad (6.10)$$

где  $\rho_2$  — вероятность нахождения одного атома в точке с координатой  $r_1$ , а другого — с  $r_2$ . Аналогичным образом можно, проинтегрировав  $\rho_N$  по координатам всех атомов, за исключением одного, получить функцию  $\rho_1(r)$ , дающую вероятность нахождения атома в точке  $r$  в жидкости, находящейся в основном состоянии. Эта величина, очевидно, не зависит от  $r$  и равна некоторому числу  $\rho_0$ . Что же касается функции  $\rho_2(r_1, r_2)$ , то в силу однородности и изотропности жидкости ее можно записать в виде  $\rho_2 = \rho_0 p(r_1 - r_2)$ . Таким образом, нормировочный интеграл можно переписать в виде

$$I = \rho_0 \int f^*(r_1) f(r_2) p(r_1 - r_2) dr_1 dr_2. \quad (6.11)$$

Интеграл (6.6) для энергии  $\mathcal{E}$  после подстановки  $F$  в форму (6.8) и интегрирования по координатам всех атомов, за исключением одного, приобретает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{\hbar^2}{2m} \sum_a \int \nabla_a f^*(r_a) \nabla_a f(r_a) \rho_N d^N r = \\ &= \rho_0 \frac{\hbar^2}{2m} \int \nabla f^*(r) \nabla f(r) dr. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Теперь выбираем функцию  $f(r)$  таким образом, чтобы отношение  $\mathcal{E}/I$  имело минимальное значение. Проварьируя отношение  $\mathcal{E}/I$  по  $f^*$ , из (6.11) и (6.12) находим уравнение

$$E \int p(r_1 - r_2) f(r_2) dr_2 = - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 f(r_1). \quad (6.13)$$

Полученное уравнение имеет решение \*)

$$f(r) = e^{ikr}. \quad (6.14)$$

Этому решению соответствует значение энергии

$$E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2mS(k)}, \quad (6.15)$$

где  $S(k)$  есть фурье-компонента корреляционной функции

$$S(k) = \int p(r) e^{ikr} dr. \quad (6.16)$$

Функция  $S(k)$ , как видно из ее связи с корреляционной функцией  $p(r)$ , представляет собой структурный фактор жидкости, характеризующий взаимодействие жидкости с различными частицами при абсолютном нуле температуры (рассеяние нейтронов,  $\gamma$ -квантов и др.). Структурный фактор  $S(k)$  не может быть вычислен. Однако он хорошо известен из эксперимента. Наиболее характерные свойства этой функции могут быть получены из элементарных соображений. При больших  $k$  функция  $S(k)$  стремится к единице; при этом корреляционная функция обращается в  $\delta$ -функцию. Функция  $S(k)$  имеет максимум при значениях  $k$  порядка  $2\pi/a$ , где  $a$  — межатомное расстояние, чему соответствует максимум функции  $p(r)$  при  $r$  порядка  $a$ , когда два атома находятся на расстоянии, равном среднему межатомному. Наконец, при малых значениях  $k$  функция  $S(k)$  стремится к нулю по линейному закону, в соответствии с тем, что на больших расстояниях корреляция исчезает.

На рис. 2 изображена функция  $S(k)$  и следующая из нее функция  $E(k)$ . Начальный линейный участок  $E(k)$  соответствует фоновой части спектра. Вблизи минимума кривая  $E(k)$  имеет вид

$$E(k) = \Delta + \frac{\hbar^2}{2\mu} (k - k_0)^2.$$

Наконец, при  $k \rightarrow \infty$   $E(k) = \frac{k^2}{2m}$ .

\*) Такого рода функция  $f$  была предложена впервые Байлем. Для малых значений волнового вектора  $k$  волновую функцию возбужденного состояния Байль записывал в виде  $\sum_a e^{ikr_a} \Phi$ .

Приведем теперь другой поучительный вывод формулы Фейнмана, основанный на гидродинамике квантовой

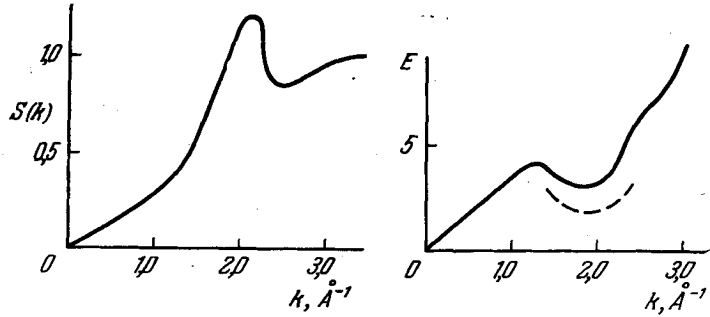


Рис. 2.

жидкости [6]. Запишем гамильтониан квантовой жидкости (см. (5.14)):

$$\hat{H} = \int \left[ \frac{v\rho v}{2} + E(\rho) \right] dV. \quad (6.17)$$

Для слабовозбужденного состояния жидкости плотность  $\rho$  можно представить в виде

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_0 + \rho_1 \quad (\rho_1 \ll \rho_0), \quad (6.18)$$

где  $\rho_0 = \text{const.}$  Далее разложим  $\rho_1$  и  $v$  в ряд Фурье:

$$\rho_1 = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum (\rho_k e^{ikr} + \text{к. с.}), \quad (6.19)$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum (v_k e^{ikr} + \text{к. с.}). \quad (6.20)$$

Из уравнения непрерывности

$$\dot{\rho} + \text{div} \frac{\rho v + v \rho}{2} = 0$$

находим связь между  $v_k$  и  $\rho_k$ :

$$v_k = i \frac{\dot{\rho}_k}{\rho_0} \frac{k}{k^2}. \quad (6.21)$$

Разложим теперь гамильтониан  $\hat{H}$  в ряд по  $\rho_1$  и  $v$  и, ограничиваясь квадратичными членами, получим \*)

$$\hat{H} = \int E(\rho_0) dV + \frac{1}{2} \int \rho_0 v^2 dV + \frac{1}{2} \int \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho_1(\mathbf{r}) \rho_1(\mathbf{r}') dV dV'. \quad (6.22)$$

Здесь  $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  есть вторая функциональная производная от плотности энергии  $E(\rho)$ ; она полностью определяется свойствами невозмущенной жидкости. В силу изотропии и однородности жидкости функция  $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  зависит только от  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ . Переходим в (6.22) к фурье-компонентам:

$$\hat{H} = \int E(\rho_0) dV + \frac{1}{V} \sum \left( \frac{|\dot{\rho}_k|^2}{2\rho_0 k^2} + \frac{1}{2} \varphi_k |\rho_k|^2 \right). \quad (6.23)$$

Полученное выражение имеет вид суммы гамильтонианов осцилляторов с частотами

$$\omega^2(k) = k^2 \varphi_k \rho_0. \quad (6.24)$$

Таким образом, слабовозбужденное состояние жидкости представляет собой совокупность элементарных возбуждений, каждое из которых описывается уравнением для гармонического осциллятора. Согласно квантовой механике энергия  $E_k$  такого осциллятора определяется его частотой:

$$E_k = \hbar \omega_k \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.25)$$

Энергия основного состояния жидкости, таким образом, равна

$$E_0 = \int E(\rho_0) dV + \sum \frac{\hbar \omega_k}{2}, \quad (6.26)$$

\*) Линейный по  $\rho_1$  член в разложении (6.22) обращается в нуль. Действительно, он имел бы вид  $\int \dots dV$ . В силу изотропии и однородности  $\varphi(\mathbf{r}) = \text{const.}$ , а интеграл  $\int \rho_1(\mathbf{r}) dV \equiv 0$ .

где второй член в (6.26) есть нулевая энергия осцилляторов. Сравнив (6.26) и (6.23), находим

$$\frac{\hbar\omega_k}{2} = \frac{1}{V} \left( \frac{|\rho_k|^2}{2\rho_0 k^2} + \frac{1}{2} \varphi_k |\rho_k|^2 \right) = \frac{1}{V} \varphi_k |\rho_k|^2. \quad (6.27)$$

Наконец, из (6.24) и (6.27) получаем снова формулу (6.15), определяющую энергию элементарного возбуждения:

$$\varepsilon_k = \hbar\omega_k = \frac{k^2 \hbar^2}{2mS(k)}, \quad (6.28)$$

где  $S(k) = \frac{|\rho_k|^2}{Vm\rho_0}$  есть фурье-компоненты функции корреляции плотности

$$S(r-r') = \frac{(n(r) - \bar{n})(n(r') - \bar{n})}{\bar{n}}. \quad (6.29)$$

Здесь  $n(r) = \rho(r)/m$  — плотность числа частиц.

Приведенный гидродинамический вывод справедлив лишь для волновых векторов  $k < 1/a$  ( $a$  — межатомное расстояние), т. е. там, где жидкость может быть рассмотрена как сплошная среда. Поэтому формула (6.15) является справедливой лишь в области малых значений волновых векторов. Благодаря тому, что она дает правильный предел при  $k \rightarrow \infty$ , т. е. при переходе к свободным частицам, ее можно рассматривать как хорошую интерполяцию в области импульсов  $k \sim 1/a$ . Представляется естественным обобщить гидродинамический вывод на случай  $T \neq 0$ . При этом энергия  $E(\rho, S)$  зависит от двух переменных  $\rho$  и  $S$ , и в разложении Фурье возникает два типа осцилляторов. Первый — уже рассмотренный выше и второй тип — осцилляторы «второго звука». При малых значениях импульса энергия возбуждений, связанная с осциллятором второго типа, определяется формулой

$$E_k = \hbar\omega_k, \quad \omega_k = u_2 k, \quad (6.30)$$

где  $u_2$  — скорость второго звука (см. § 20, (20.15)). Таким образом, мы получаем возбуждения, являющиеся квантами второго звука. Следует, однако, помнить, что о

квантах второго звука можно говорить только в том случае, когда их длина волны больше длины свободного пробега обычных возбуждений, т. е. когда имеет место двух-скоростная гидродинамика. Благодаря этому последнему обстоятельству вклад квантов второго звука во все эффекты обрезается длинами волн порядка длины свободного пробега возбуждений (ротонов и фононов), и поэтому оказывается пренебрежимо малым,

## § 7. Энергетический спектр слабо неидеального бозе-газа

Задача о теоретическом определении энергетического спектра реальной жидкости, естественно, не может быть решена. Поэтому представляет интерес рассмотрение какой-либо простой модели, в которой возникал бы энергетический спектр со свойствами, близкими к описанным выше.

Рассмотрим неидеальный бозе-газ частиц (со спином нуль). Спектр возбуждений в случае слабой неидеальности, когда имеет место теория возмущения, может быть получен точно (Боголюбов [7]).

Гамильтониан системы при вторичном квантовании записывается в виде

$$\hat{H} = \sum \frac{p^2}{2m} a_p^+ a_p + \frac{1}{2V} \sum U_{p,p'; p,p'} a_p^+ a_{p'}^+ a_p a_{p'}, \quad (7.1)$$

где операторы  $a^+$  и  $a_p$  удовлетворяют известным соотношениям коммута ии:

$$\left. \begin{aligned} a_p a_{p'}^+ - a_{p'}^+ a_p &= \delta_{p,p'}, & a_p a_{p'} - a_{p'} a_p &= 0, \\ a_p^+ a_{p'}^+ - a_{p'}^+ a_p^+ &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

Пусть рассматриваемая система находится вблизи абсолютного нуля.

Мы будем интересоваться слабовозбужденными состояниями (малые  $p$ ). Поэтому матричный элемент взаимодействия  $U_{p,p'; p,p'}$  можно просто заменить на постоянную, которую мы обозначим через  $\alpha$ . Следующее упрощающее обстоятельство для слабовозбужденного состояния

состоит в том, что почти все частицы находятся в конденсате, т. е. имеют энергию, равную нулю ( $p = 0$ ). Таким образом, полное число частиц  $N$  равно

$$N = N_0 + \sum_p N_p, \quad (7.3)$$

причем  $\sum N_p \ll N_0$ . Поскольку число конденсатных частиц велико, то эти частицы можно рассматривать классически и заменить всюду операторы  $a_0^+$  и  $a_0$  на  $\sqrt{N_0}$ .

В энергию взаимодействия главный вклад дают члены, описывающие взаимодействие частиц конденсата между собой  $0 + 0 \rightarrow 0 + 0$  и взаимодействие неконденсатных частиц с частицами конденсата.

Выпишем эти члены:

$$\frac{N_0^2}{2V} \alpha + \frac{N_0}{V} \alpha \sum (a_p a_{-p} + a_p^+ a_{-p}^+ + 2a_p^+ a_p + 2a_{-p}^+ a_{-p}). \quad (7.4)$$

Далее, выразим  $N_0$  через  $N$  и  $\sum a_p^+ a_p$  с помощью (7.3) и подставим в (7.4); получаем

$$\frac{N^2}{2V} \alpha + \frac{N}{V} \alpha \sum (a_p a_{-p} + a_p^+ a_{-p}^+ + a_p^+ a_p + a_{-p}^+ a_{-p}). \quad (7.5)$$

Таким образом, гамильтониан (7.1) с интересующей нас точностью равен

$$\hat{H} = \sum \left( \alpha N + \frac{p^2}{2m} \right) (a_p^+ a_p + a_{-p}^+ a_{-p}) + \frac{N\alpha}{V} \sum (a_p a_{-p} + a_p^+ a_{-p}^+). \quad (7.6)$$

Полученный квадратичный по операторам  $a_p$  и  $a_p^+$  гамильтониан с помощью преобразования Боголюбова приводится к диагональному виду. Для этого вводим новые операторы  $\alpha_p^+$  и  $\alpha_p$ , связанные с  $a_p^+$  и  $a_p$  линейным соотношением:

$$\left. \begin{aligned} a_p &= u_p \alpha_p + v_p \alpha_{-p}^+, \\ a_p^+ &= u_p \alpha_p^+ + v_p \alpha_{-p}. \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

Из требования, чтобы новые операторы удовлетворяли обычным соотношениям коммутации для бозе-операторов,

следует

$$u_p^2 - v_p^2 = 1. \quad (7.8)$$

Подставив  $a_p^+$  и  $a_p$  в виде (7.7) в (7.6), получаем

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_{p>0} \left\{ \left( \frac{p^2}{2m} + \frac{N\alpha}{V} \right) (u_p^2 + v_p^2) + 2 \frac{N\alpha}{V} u_p v_p \right\} (\alpha_p^+ \alpha_p + \\ & + \alpha_{-p}^+ \alpha_{-p}) + \sum_{p>0} \left\{ \left( \frac{p^2}{2m} + \frac{N\alpha}{V} \right) 2u_p v_p + \frac{N\alpha}{V} (u_p^2 + v_p^2) \right\} \times \\ & \times (\alpha_p^+ \alpha_{-p}^+ + \alpha_{-p} \alpha_p) + \sum_{p>0} \left\{ 2 \left( \frac{p^2}{2m} + \frac{N\alpha}{V} \right) v_p^2 + 2 \frac{N\alpha}{V} u_p v_p \right\} + \\ & + \frac{\alpha N^2}{2V}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

для диагональности полученного гамильтониана необходимо, чтобы члены вида  $\alpha_p^+ \alpha_{-p}^+$  отсутствовали, следовательно,

$$\left( \frac{p^2}{2m} + \frac{N\alpha}{V} \right) 2u_p v_p + \frac{N\alpha}{V} (u_p^2 + v_p^2) = 0. \quad (7.10)$$

Из двух уравнений (7.8) и (7.10) находим коэффициенты  $u_p$  и  $v_p$  и подставляем их в (7.9). Окончательно получаем

$$\hat{H} = E_0 + \sum_{p>0} V \left[ \left( \frac{p^2}{2m} + \frac{N\alpha}{V} \right)^2 - \left( \frac{N\alpha}{V} \right)^2 \right] (\alpha_p^+ \alpha_p + \alpha_{-p}^+ \alpha_{-p}), \quad (7.11)$$

где «нулевая» энергия

$$\begin{aligned} E_0 = & \frac{\alpha N^2}{2V} - \sum_{p>0} \left\{ \left( \frac{p^2}{2m} + \frac{N\alpha}{V} \right) - \right. \\ & \left. - \sqrt{\left( \frac{p^2}{2m} + \frac{N\alpha}{V} \right)^2 - \left( \frac{N\alpha}{V} \right)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Полученный результат весьма примечателен. Из (7.11) мы видим, что слабозвужденное состояние рассматриваемой системы представляет собой суперпозицию элементарных возбуждений с энергетическим спектром

$$\varepsilon_p = \sqrt{\left( \frac{p^2}{2m} + \frac{N\alpha}{V} \right)^2 - \left( \frac{N\alpha}{V} \right)^2}. \quad (7.13)$$

При достаточно малых  $p$ :

$$p^2 \ll 4m \frac{N\alpha}{V} \quad (7.14)$$

имеем

$$\varepsilon_p = p \sqrt{\frac{N\alpha}{mV}}, \quad (7.15)$$

т. е. элементарные возбуждения являются фононами со скоростью звука

$$c = \sqrt{\frac{N\alpha}{mV}}. \quad (7.16)$$

При больших значениях  $p$  имеет место более сложный закон дисперсии, асимптотически приближающийся к спектру свободных частиц  $\varepsilon_p = \frac{p^2}{2m}$ . Однако следует помнить, что произведенный анализ был справедлив лишь для достаточно малых значений  $p$ .

Вернемся теперь к выражению (7.12) для энергии основного состояния  $E_0$ . Хотя сумма в (7.12) и расходится, однако, как было показано Ли и Янгом [8], можно получить конечный результат, если выразить матричный элемент  $\alpha$  через его значение во втором приближении теории возмущений. Второе приближение теории возмущений дает

$$\alpha^{(2)} = \alpha - \frac{\alpha^2}{V} \sum \frac{m}{p^2}. \quad (7.17)$$

Выразив отсюда  $\alpha$  через  $\alpha^{(2)}$  и подставив в (5.12), получаем

$$E_0 = \frac{N^2 \alpha^{(2)}}{2V} - \sum \left\{ \left( \frac{p^2}{2m} + \frac{N\alpha}{V} \right) - \sqrt{\left( \frac{p^2}{2m} + \frac{N\alpha}{V} \right)^2 - \left( \frac{N\alpha}{V} \right)^2} - \left( \frac{N\alpha}{V} \right)^2 \frac{m}{p^2} \right\}. \quad (7.18)$$

Заменим сумму в (7.18) на интеграл и выполним несложное интегрирование. Наконец, вместо матричного элемента перехода введем более удобную величину — амплитуду

рассеяния

$$a = \frac{m\alpha}{4\pi\hbar^2}, \quad (7.19)$$

после чего окончательно получаем

$$E_0 = \frac{2\pi\hbar^2 a N^2}{mV} \left( 1 + \frac{128}{15\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{a^3 N}{V}} \right). \quad (7.20)$$

Полученная формула представляет первые два члена разложения энергии основного состояния по степеням  $a(\frac{N}{V})^{1/2}$ . Таким образом, все рассмотрение справедливо для случая короткодействующих сил, когда амплитуда рассеяния мала по сравнению с расстоянием между частицами.

## ГЛАВА III

ФОРМА СПЕКТРА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ  
ВБЛИЗИ ОСОБЫХ ТОЧЕК [9]

## § 8. Распад возбуждений

Исследуем свойства спектра вблизи точек, где возможен распад возбуждения на два. Из законов сохранения энергии и импульса следует тогда уравнение

$$\varepsilon(p) = \varepsilon(q) + \varepsilon(p - q); \quad (8.1)$$

здесь  $p$  — импульсы распадающегося возбуждения,  $q$  и  $p - q$  — импульсы образующихся возбуждений. Предполагаем, что у спектра имеются устойчивые области. Математически это означает, что вплоть до некоторого  $p_0$  уравнение (8.1) не имеет решений, а начиная с  $p_0$  появляется возможность удовлетворить уравнению (8.1). Для этого необходимо, чтобы правая часть уравнения (8.1) имела минимум как функция  $q$ . Вектор  $q$  может быть задан двумя величинами: абсолютной величиной  $|q|$  и углом  $\vartheta$ , образованным векторами  $q$  и  $p$ . Условия экстремума правой части по переменным  $|q|$  и  $\cos \vartheta$  имеют соответственно вид

$$\varepsilon'(|q|) + \varepsilon'(|p - q|) \frac{|q| - |p| \cos \vartheta}{|p - q|} = 0, \quad (8.2)$$

$$\varepsilon'(|p - q|)|p| \cdot |q| = 0. \quad (8.3)$$

Штрихами обозначено дифференцирование по аргументу. Из условия (8.3) следует, что либо  $q \rightarrow 0$ , либо  $\varepsilon'(|p - q|) = 0$ . Таким образом, согласно (8.2) и (8.3) имеются две

ВОЗМОЖНОСТИ:

$$\text{а) } q = 0, \quad \varepsilon'(0) = \varepsilon'(|p|) \cos \vartheta, \quad (8.4)$$

$$\text{б) } \varepsilon'(|p - q|) = 0, \quad \varepsilon'(|q|) = 0. \quad (8.5)$$

В случае а) при распаде испускается возбуждение с импульсом  $q \rightarrow 0$ , т. е. фонон. Из условия (8.4) мы видим, что впервые испускание фонона произойдет там, где  $\varepsilon'(p) = \pm \varepsilon'(0)$ . Поскольку в бозе-системе длинноволновые возбуждения являются фононами, то  $\varepsilon'(0) = c$  — скорости звука. Таким образом, в точке спектра, где начинается неустойчивость, происходит испускание фонона, вылетающего либо по направлению ( $\vartheta = 0$ ), либо против направления ( $\vartheta = \pi$ ) импульса распадающегося возбуждения. При этом мы предполагаем, что кривая  $\varepsilon(p)$  имеет непрерывную производную. В принципиально возможном, однако мало вероятном случае излома кривой  $\varepsilon(p)$  фонон будет вылетать под углом  $\vartheta$ , определяемым соотношением (8.4)

$$\cos \vartheta = \frac{\varepsilon'(0)}{\varepsilon'(p)}.$$

В случае б) распад происходит при значениях импульсов возбуждений  $q$  и  $p - q$ , для которых энергия  $\varepsilon$  имеет минимум. Величина импульса  $q$  и угол вылета определяются при этом двумя уравнениями (8.5).

Экстремум правой части (8.1) по углу  $\vartheta$  может быть достигнут также и на границах области, т. е. при углах  $\vartheta = 0$  и  $\vartheta = \pi$  (случай в). В этом случае из условия (8.2) следует

$$\varepsilon'(|q|) = \pm \varepsilon'(|p| \mp |q|). \quad (8.6)$$

Таким образом, при таком распаде возбуждения вылетают с одинаковой по величине скоростью под углом  $\vartheta = 0$  или  $\vartheta = \pi$  друг к другу. Можно показать, что указанными тремя случаями исчерпываются все возможные точки неустойчивости спектра. Заметим, что для спектра возбуждений слабо неидеального бозе-газа (7.13) неустойчивость появляется в самом начале спектра. Действительно, имеет место случай а), поскольку при  $q \rightarrow 0$  и  $\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial |q|^2} > 0$  правая часть (8.1) имеет минимум. В спектре жидкого гелия имеет



место обратная ситуация: благодаря противоположному знаку  $\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial |q|^2}$  на фононной части спектра фононы оказываются устойчивыми относительно распада на два.

Рассмотрим теперь подробно свойства спектра в точках, где возможен распад возбуждений (пороговые точки). Исследование производится методами квантовой теории поля. Необходимо выяснить особенность гриновской функции возбуждения  $G(p)$  вблизи порога распада ( $p$  — 4-импульс с компонентами  $\varepsilon, p$ ). Взаимодействие между возбуждениями предполагается имеющим трехчастичный характер. Соответствующая вершинная часть есть  $\Gamma(p; q; p - q)$ . Гриновская функция  $G(p)$  выражается через нулевую функцию  $G_0(p)$  для «свободного» возбуждения и вершинную часть  $\Gamma$  с помощью уравнения Дайсона

$$G^{-1}(p) = G_0^{-1}(p) + i \int \Gamma(p; q; p - q) G(q) G(p - q) \Gamma_0(p; q; p - q) \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}, \quad (8.7)$$

где  $G_0$  есть вершинная часть в первом приближении теории возмущений (некоторое затравочное взаимодействие).

### § 9. Свойства спектра вблизи порога рождения фонона

Предполагаем, что испущенный фонон устойчив и при малом  $q$  спектр имеет вид ( $\alpha > 0$ )

$$\omega(q) = c|q| - \alpha|q|^3. \quad (9.1)$$

Однако, как мы увидим, член с  $\alpha$  в  $\omega(q)$  окажется в дальнейшем несущественным. Далее предполагаем, что вблизи порога ( $|p| = p_c$ ) спектр имеет вид

$$\varepsilon(p) = \varepsilon_c + c(|p| - p_c) + \beta(|p| - p_c)^2, \quad (9.2)$$

и особенность появляется в высших членах по  $(|p| - p_c)$ . Естественное, что вычисления должны подтвердить это последнее предположение. При этом, для того чтобы правая часть (8.1) имела минимум по  $|q|$ , необходимо, чтобы  $\beta$  было больше нуля. Действительно, при  $\cos \vartheta = 1$

и  $|p| = p_c$  правая часть (8.1) равна

$$\varepsilon_c + \beta q^2$$

и имеет минимум по  $|q|$  при  $\beta > 0$ .

При малых  $\omega$  и  $q$  гриновская функция равна

$$G(q) = \frac{a}{i\omega^2 - \omega^2(q) + i\delta} \quad (9.3)$$

и пропорциональна функции распространения фонона.

При  $|p| \approx p_c$  и  $\varepsilon \approx \varepsilon_c$  гриновская функция возбуждения имеет особенность. Мы предположим, что  $G^{-1}(p)$  вблизи нуля имеет вид

$$G^{-1}(p) = b^{-1}[c\Delta p + \beta(\Delta p)^2 - \Delta\varepsilon - i\delta], \quad \Delta p = |p| - p_c, \quad \Delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_c \quad (9.4)$$

плюс члены более высокого порядка, которые подлежат определению. Вершинная часть для фонона при малых  $q$  пропорциональна  $|q|$ , так что имеем

$$\Gamma_0(p; q; p - q) = g_0|q|, \quad \Gamma(p; q; p - q) = g|q|. \quad (9.5)$$

Нас интересует та часть интеграла в уравнении Дайсона (8.7), которая содержит особенность. Несложный анализ выражения (8.7) показывает, что особенность возникает в интеграле при интегрировании по малым значениям  $\omega$  и  $|q|$ , для которых нам известны все входящие в интеграл функции. Таким образом, предполагаемая особая часть интеграла (8.7) равна

$$\text{const} \int \frac{q^4 d|q| d\cos\vartheta d\omega}{[(cq)^2 - \omega^2 - i\delta][c(\Delta p - |q|\cos\vartheta) - \Delta\varepsilon + \omega + \beta(\Delta p - |q|)^2 - i\delta]}. \quad (9.6)$$

В полученном интеграле существенный вклад дают углы  $\vartheta$ , близкие к нулю. Поэтому можно всюду положить  $\cos\vartheta = 1$ . Интегрирование по  $\omega$  можно распространить на интервал  $-\infty < \omega < \infty$ , после чего интегрирование сводится к взятию вычета в точке  $\omega = c|q|$ . В результате получаем

$$\text{const} \int q^2 d|q| \ln(x - 2\beta q\Delta p + \beta q^2), \quad (9.7)$$

где  $x = c\Delta p - \Delta\varepsilon + \beta(\Delta p)^2$ .

Последнее интегрирование по  $|q|$  производится без труда после разложения выражения под логарифмом на множители; таким путем находим

$$\left. \begin{aligned} & a_1 q_1^3 \ln q_1 + a_2 q_2^3 \ln q_2, \\ & q_{1,2} = \beta \Delta p \pm \sqrt{(\beta \Delta p)^2 - (\beta - \alpha) x}. \end{aligned} \right\} \quad (9.8)$$

Отсюда в непосредственной близости от полюса  $G(p)$  (нуля  $G^{-1}(p)$ ) получаем ( $x \ll \beta(\Delta p)^2$ ) особую часть  $G^{-1}(p)$ :

$$(\Delta p)^3 \ln(-\Delta p). \quad (9.9)$$

С учетом (9.4) имеем

$$G^{-1}(p) = b^{-1} [c \Delta p + \beta (\Delta p)^2 + \gamma (\Delta p)^3 \ln(-\Delta p) - \Delta \varepsilon]. \quad (9.10)$$

Из формулы (9.10) следует, что энергия возбуждения вблизи порога испускания фонона равна

$$\begin{aligned} \varepsilon = \varepsilon_c + c(|p| - p_c) + \beta(|p| - p_c)^2 + \\ + \gamma(|p| - p_c)^3 \ln(p_c - |p|). \end{aligned} \quad (9.11)$$

При  $|p| > p_c$  в энергии  $\varepsilon$  появляется отрицательная мнимая часть, равная  $-\gamma(\Delta p)^3$ , что означает появление затухания. При этом время жизни обратно пропорционально  $(\Delta p)^3$ . Заметим, что этот результат можно было бы получить по теории возмущения. Это объясняется тем, что взаимодействие с длинноволновыми фононами всегда является слабым. Выше был рассмотрен случай, когда фонон испускается под углом  $\vartheta = 0$  к направлению импульса распадающегося возбуждения. Для другого возможного случая, когда  $\vartheta = \pi$ , меняется только кинематика распада, характер же особенности остается тем же.

#### § 10. Свойства спектра вблизи порога распада на два возбуждения с неравными нулю параллельными импульсами

Из физических соображений очевидно, что главный вклад в интеграл в уравнении (8.7) в этом случае дает область импульсов  $q$ , близких к значению  $q_0$ , с которым рождается новое возбуждение. Функция Грина вблизи порогового значения  $q_0$  не имеет особенностей и записы-

вается вблизи полюса в обычном виде

$$G(q) = A(\varepsilon(q) - \omega - i\delta)^{-1}. \quad (10.1)$$

Это обстоятельство значительно упрощает весь дальнейший анализ. Разбиваем область интегрирования в интеграле (8.7) на две, выделив небольшую окрестность вблизи  $q_0$  и  $\varepsilon_0$ . Интегрирование по этой небольшой области, как и можно ожидать, выдает нерегулярную часть гриновской функции вблизи  $|p| = p_c$ . В указанной области вершинные части  $\Gamma$  и  $\Gamma_0$  можно считать постоянными. Таким образом, нерегулярная часть определяется интегралом

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3 q d\omega}{[\varepsilon(q) - \omega - i\delta][\varepsilon(p - q) - \varepsilon + \omega - i\delta]} \sim \\ \sim \int \frac{d^3 q}{\varepsilon(q) + \varepsilon(p - q) - \varepsilon}. \end{aligned} \quad (10.2)$$

При  $|p| = p_c$  сумма  $\varepsilon(q) + \varepsilon(p - q)$  имеет минимум как функция  $|q|$ , и ее можно записать в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon(q) + \varepsilon(p - q) \approx \varepsilon_c + v_c \Delta p + \alpha(q_0 - q)^2 + \\ + \frac{\beta(q_0 - q, p_c)^2}{p_0^2}. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Здесь  $v_c$  — скорость образующихся возбуждений,

$$\alpha = \frac{v_c p_c}{2q_0(p_c - q_0)},$$

$$\beta = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial q^2} \right)_{q=q_0} + \left( \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial q^2} \right)_{q=p_c - q_0} - \frac{v_c p_c}{q_0(p_c - q_0)} \right\}.$$

Вводим новые переменные  $u = |q - q_0|$  и  $u p_c = u p_c \cos \psi$ , после чего интегрирование в (6.20) выполняется элементарно, и мы получаем

$$G^{-1} \sim \int \frac{u^2 du d \cos \psi}{v_c \Delta p - \Delta \varepsilon + \beta u^2 \cos^2 \psi + \alpha u^2} \sim \sqrt{v_c \Delta p - \Delta \varepsilon}. \quad (10.4)$$

Поскольку точка  $|p| = p_c$  и  $\varepsilon = \varepsilon_c$  есть точка спектра, то при  $\Delta p = 0$  и  $\Delta \varepsilon = 0$   $G^{-1}(p)$  должна обращаться в нуль, а следовательно, регулярная часть  $G^{-1}(p)$  при малых  $\Delta p$  и должна иметь вид  $a' \Delta p + b' \Delta \varepsilon$ . Таким образом, окончательно имеем

$$G^{-1}(p) = A_1^{-1} [a \Delta p + \Delta \varepsilon + b \sqrt{v_c \Delta p - \Delta \varepsilon}]. \quad (10.5)$$

Энергия возбуждения определяется уравнением  $G^{-1}(p) = 0$ . Решение этого уравнения при  $|p| < p_c$  имеет вид

$$\varepsilon = \varepsilon_c + v_c (|p| - p_c) - \left( \frac{a + v_c}{b} \right)^2 (|p| - p_c)^2. \quad (10.6)$$

При этом должно быть выполнено неравенство  $\frac{(a + v_c)}{b} > 0$ .

При  $|p| > p_c$  уравнение  $G^{-1}(p) = 0$  не имеет решений ни действительных, ни комплексных. Таким образом, кривая  $\varepsilon(p)$  вблизи порога имеет наклон  $v_c$  и далее не продолжается.

### § 11. Распад на два возбуждения, вылетающие под углом друг к другу

В этом случае, согласно (8.5), рождающиеся возбуждения имеют энергии, соответствующие минимумам на кривой  $\varepsilon(p)$ . Имея в виду спектр жидкого гелия, у которого минимум соответствует ротонам, мы будем говорить о распаде возбуждения на два ротона с энергиями

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon(q) &= \Delta + \frac{(|q| - p_0)^2}{2\mu}, \\ \varepsilon(p - q) &= \Delta + \frac{(|p - q| - p_0)^2}{2\mu}. \end{aligned} \right\} \quad (11.1)$$

По тем же соображениям, что и в предыдущем случае, нерегулярная часть гриновской функции возникает от интегрирования в уравнении Дайсона по области  $|q|$ , близкой к  $p_0$ . Однако при этом вершинная часть оказывается также нерегулярной вблизи порога. Чтобы увидеть, с какого рода особенностями мы встречаемся в этом случае, рассмотрим интеграл, который получается в уравнении для  $G^{-1}$ , если вначале предположить, что  $\Gamma$  регулярна (теория возмущений). Этот интеграл после подстановки (11.1) и введения цилиндрических координат

$$\begin{aligned} q_z &= p_0 \cos \frac{\theta_0}{2} + q'_z, \\ q_x &= \left( p_0 \sin \frac{\theta_0}{2} + q'_\rho \right) \cos \varphi, \\ q_y &= \left( p_0 \sin \frac{\theta_0}{2} + q'_\rho \right) \sin \varphi \end{aligned}$$

легко вычисляется:

$$\int \frac{dq'_\rho dq'_z}{2\Delta - \varepsilon + \frac{1}{\mu} \left( \sin^2 \frac{\theta_0}{2} q_\rho'^2 + \cos^2 \frac{\theta_0}{2} q_z'^2 \right)} \sim \ln(2\Delta - \varepsilon). \quad (11.2)$$

Для вычисления  $\Gamma(p; p - q_0; q_0)$  вблизи  $|q_0| = p_0$  следовало бы решить соответствующее интегральное уравнение, связывающее  $\Gamma$  с некоторой затравочной  $\Gamma_0$ . Мы не будем подробно останавливаться на этом. Заметим только, что анализ такого уравнения приводит к необходимости суммирования ряда геометрической прогрессии, члены которой есть степени интеграла вида (11.2). Таким образом, удастся показать, что

$$\Gamma(p; p - q_0; q_0) \sim \frac{P}{1 + Q \ln[(2\Delta - \varepsilon)/2\Delta]}. \quad (11.3)$$

Подставив такого вида  $\Gamma$  в уравнение Дайсона (6.7) и произведя интегрирование, аналогичное (6.26), получаем нерегулярную часть  $G^{-1}(p)$  вблизи порога в виде

$$\frac{a}{\ln[(2\Delta - \varepsilon)/\alpha]}. \quad (11.4)$$

Поскольку  $G^{-1}(p_c) = 0$ , окончательно получаем

$$G^{-1}(p) = A^{-1} \left[ p - p_c - \frac{a}{\ln[(2\Delta - \varepsilon)/\alpha]} \right]. \quad (11.5)$$

Из уравнения  $G^{-1}(p) = 0$  с помощью (11.5) получаем при  $p < p_c$  спектр вблизи порога

$$\varepsilon(p) = 2\Delta - \alpha \exp \left( \frac{a}{p_c - |p|} \right). \quad (11.6)$$

Таким образом, в этом случае кривая  $\varepsilon(p)$  оканчивается в точке  $|p| = p_c$  с горизонтальной касательной (касание бесконечного порядка).

Имеющиеся в настоящее время экспериментальные нейтронографические данные [4] указывают, что, по-видимому, в сверхтекучем гелии имеет место этот последний случай, т. е. кривая  $\varepsilon(p)$  заканчивается в точке, где происходит распад на два ротона.

## ГЛАВА IV

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ  
ВОЗБУЖДЕНИЙ [10, 11]

## § 12. Квантование поля фононов

В настоящей главе мы рассмотрим взаимодействие элементарных возбуждений в гелии II друг с другом. Полученные выражения для эффективных сечений различных процессов взаимодействия возбуждений будут использованы в дальнейшем при вычислении кинетических коэффициентов гелия II.

Начальный участок энергетического спектра является в первом приближении линейным (фононы). Однако в ряде эффектов оказывается существенной дисперсия фононной части спектра, т. е. отклонение энергетической кривой от линейной зависимости. Ввиду чрезвычайной малости эффекта его невозможно определить по существующим нейтронографическим данным. Не ясно также, можно ли этот эффект вычислить теоретически, рассматривая систему взаимодействующих фононов. Имея в виду, что спектр фононов устойчив, и учитывая изотропию жидкости, можно сразу для начального участка фононного спектра написать следующее выражение:

$$\varepsilon = c p (1 - \gamma p^2), \quad (12.1)$$

где  $\gamma$  — существенно положительная величина. Оценку величины  $\gamma$  можно произвести, интерполируя всю энергетическую кривую. Для этого построим интерполяционную четырехчленную формулу с неопределенными пока коэффициентами

$$\varepsilon^2 = A_1 p^2 + A_2 p^4 + A_3 p^6 + A_4 p^8. \quad (12.2)$$

Выражения (1.1) и (1.2) дают четыре условия:

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p}\right)_{p=0} = c, \quad \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p}\right)_{p=p_0} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial p^2}\right)_{p=p_0} = \frac{1}{\mu}, \quad \varepsilon(p_0) = \Delta,$$

позволяющие найти четыре коэффициента  $A_1, A_2, A_3$  и  $A_4$  в формуле (12.2). Значения этих коэффициентов оказываются равными

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= c^2, \\ A_2 &= \frac{1}{4p_0^2} \left( 24 \frac{\Delta^2}{p_0^2} + \frac{\Delta}{\mu} - 12c^2 \right), \\ A_3 &= \frac{1}{p_0^4} \left( 3c^2 - 8 \frac{\Delta^2}{p_0^2} - \frac{\Delta}{2\mu} \right), \\ A_4 &= -\frac{1}{4p_0^6} \left( 4c^2 - 12 \frac{\Delta^2}{p_0^2} - \frac{\Delta}{\mu} \right). \end{aligned} \right\}$$

Извлечем квадратный корень из выражения (12.2); ограничиваясь только первыми двумя членами, получим

$$\varepsilon = c (p - \gamma p^3),$$

где  $\gamma = -A_2/2c^2$ . Значение  $\gamma$ , вычисленное с помощью известных значений параметров  $\Delta, \mu$  и  $p_0$ , оказывается равным

$$\gamma \approx 2,7 \cdot 10^{37} \text{ г}^{-2} \text{ см}^{-2} \text{ сек}^2. \quad (12.3)$$

Для вычисления эффективных сечений рассеяния фононов мы воспользуемся разложением поля фононов в ряд Фурье. При этом будем исходить из аналогии между полем фононов и полем излучения. Представим плотность гелия  $\rho(r)$  и скорость  $v(r)$  в виде ряда Фурье

$$\left. \begin{aligned} \rho(r) &= \rho_0 + V^{-1/2} \left\{ \sum_p \rho_p e^{i p r / \hbar} + \rho_p^* e^{-i p r / \hbar} \right\}, \\ v(r) &= V^{-1/2} \left\{ \sum_p v_p e^{i p r / \hbar} + v_p^* e^{-i p r / \hbar} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (12.4)$$

Здесь  $\rho_0$  — равновесная плотность в отсутствие фононов,  $p$  — импульс фонона, связанный с частотой  $\omega$  соотношением

$$\omega = c p / \hbar. \quad (12.5)$$

Для бегущих волн суммирование в (12.4) производим как по положительным, так и по отрицательным значениям импульса.

Из соотношения коммутации (5.9) между  $\rho(r)$  и  $v(r)$ :

$$\rho(r_1)v(r_2) - v(r_2)\rho(r_1) = (\hbar/i) \nabla \delta(r_1 - r_2)$$

можно получить соотношения коммутации для компонент Фурье. Для этого выразим  $\rho(r_1)$  и  $v(r)$  с помощью (12.4) и подставим указанные выражения в левую часть (5.9). Стоящую в правой части выражения (5.9)  $\delta$ -функцию представим в виде

$$\delta(r_1 - r_2) = (1/2) V^{-1} \left\{ \sum_p e^{i(p, r_1 - r_2)/\hbar} + e^{-i(p, r_1 - r_2)/\hbar} \right\} \quad (12.6)$$

и сравним коэффициенты при одинаковых экспонентах в левой и правой частях. Это дает соотношения, справедливые при  $\text{rot } v = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} \rho_p \rho_s^* - \rho_s^* \rho_p &= \frac{\rho_0 p}{2c} \delta_{ps}, \quad v_p = \frac{cp}{\rho_0 p} \rho_p, \\ \delta_{ps} &= \begin{cases} 1, & p = s, \\ 0, & p \neq s. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (12.7)$$

Гамильтониан рассматриваемой системы — жидкого гелия в объеме  $V$  — равен

$$\hat{H} = \int_V \left\{ \frac{1}{2} v \rho v + E(\rho) \right\} dV. \quad (12.8)$$

Без учета ангармонических членов он выражается через фурье-компоненты плотности в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \hat{H}_0 &= \frac{c^2}{\rho_0} \sum_p (\rho_p \rho_p^* + \rho_p^* \rho_p), \\ \langle \hat{H} \rangle &= \sum_p \left( n_p + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega; \end{aligned} \right\} \quad (12.9)$$

здесь  $n_p$  — число фононов с импульсом  $p$ . Из (12.6) и (12.8) находим отличные от нуля матричные элементы фурье-

компонент плотности

$$(\rho_p)_{n_p, n_p+1} = \sqrt{(p\rho_0/2c)(n_p+1)} e^{-i\omega t}, \quad (12.10)$$

$$(\rho_p^*)_{n_p, n_p-1} = \sqrt{(p\rho_0/2c)n_p} e^{i\omega t}. \quad (12.11)$$

После этих предварительных замечаний перейдем к рассмотрению различных возможных случаев взаимодействия элементарных возбуждений друг с другом.

### § 13. Рассеяние фонона фононом

Спектр фононов вида (12.1) устойчив — распад фонона на два или более фононов невозможен, так как невозможно при этом одновременно удовлетворить законам сохранения энергии и импульса. Взаимодействие фононов обязано наличию ангармонических членов в гамильтониане (12.8). Матричные элементы плотности (12.10) и (12.11) пропорциональны  $\sqrt{p}$ , т. е. существенно зависят от энергии фонона. При низких температурах ( $T < T_\lambda$ ) энергия фононов заведомо много меньше дебаевской энергии. Поэтому взаимодействие фононов слабо, и можно рассчитывать возможные процессы по теории возмущений. Первый из возможных процессов — рассеяние фонона фононом — является четырехфононным. Ограничиваясь членами четвертого порядка по  $\rho'$ , запишем гамильтониан (12.8) в виде

$$H = H_0 + V_3 + V_4, \quad (13.1)$$

где  $H_0$  — гамильтониан свободного поля фононов, содержащий члены второго порядка по  $\rho'$ ;  $V_3$  содержит ангармонические члены третьего порядка:

$$V_3 = \frac{v\rho'v}{2} + \frac{1}{3!} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{c^2}{\rho} \right) \rho'^3, \quad (13.2)$$

и наконец,  $V_4$  — члены четвертого порядка по  $\rho'$ :

$$V_4 = \frac{1}{4!} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \left( \frac{c^2}{\rho} \right) \rho'^4. \quad (13.3)$$

$\rho'$  есть отклонение плотности от ее значения в неподвижной жидкости. Амплитуда перехода двух фононов в два других получается из кубических по  $\rho'$  членов в энергии  $V_3$

во втором приближении теории возмущений и из членов четвертой степени по  $\rho'$  в первом приближении теории возмущений

$$\langle p, p_1 | H | p', p'_1 \rangle = \sum \frac{\langle p, p_1 | V_3 | q \rangle \langle q | V_3 | p', p'_1 \rangle}{\varepsilon(p) + \varepsilon(p_1) - \varepsilon(q)} + \langle p, p_1 | V_4 | p', p'_1 \rangle. \quad (13.4)$$

При рассеянии фононов с импульсами  $p$  и  $p_1$ , приводящем к появлению фононов  $p'$  и  $p'_1$ , возможны шесть промежуточных состояний I — VI, в которых фононы имеют импульсы:

- I.  $p + p_1$ ; II.  $p - p', p_1, p'$ ; III.  $p - p'_1, p_1, p'_1$ ;  
IV.  $p_1 - p'_1, p, p'_1$ ; V.  $p_1 - p', p, p'$ ;  
VI.  $p, p_1, p', p'_1, -(p' + p'_1)$ .

Матричный элемент перехода из начального состояния (A) в конечное состояние (F) во втором приближении теории возмущений равен

$$H'_{AF} = \sum_{i=1}^{VI} \frac{(V_3)_{Ai} (V_3)_{iF}}{E_A - E_i} + (V_4)_{AF}.$$

Входящие в знаменатели (13.4) разности энергий в начальном и промежуточном состояниях выразим через энергию фононов:

$$\left. \begin{aligned} E_A - E_I &= \varepsilon(p) + \varepsilon(p_1) - \varepsilon(|p + p_1|), \\ E_A - E_{II} &= \varepsilon(p) - \varepsilon(p') - \varepsilon(|p - p'|), \\ E_A - E_{III} &= \varepsilon(p) - \varepsilon(p'_1) - \varepsilon(|p - p'_1|), \\ E_A - E_{IV} &= \varepsilon(p_1) - \varepsilon(p'_1) - \varepsilon(|p_1 - p'_1|), \\ E_A - E_V &= \varepsilon(p_1) - \varepsilon(p') - \varepsilon(|p_1 - p'|), \\ E_A - E_{VI} &= -\varepsilon(p') - \varepsilon(p'_1) - \varepsilon(|p' + p'_1|). \end{aligned} \right\} \quad (13.5)$$

Из выражений (13.5) легко видеть, что при неучете дисперсии знаменатели первых пяти членов выражения (13.4) могут обращаться в нуль, приводя к существенной

расходимости матричного элемента. Действительно, при линейной зависимости энергии фононов от импульса знаменателя обращаются в нуль каждый раз, когда угол между импульсами сталкивающихся фононов равен нулю, т. е. когда  $|p + p_1| = p + p_1$ . Поэтому для энергии фононов мы будем пользоваться выражением (12.1), содержащим, кроме линейных, также и кубические по импульсам члены.

Входящие в (13.4) матричные элементы возмущения  $V_3$  и  $V_4$  вычисляются с помощью выражений (12.10) и (12.11) для не исчезающих матричных элементов плотности \*). Получающиеся при этом выражения существенным образом содержат два безразмерных параметра:

$$u = \frac{\rho_0}{c} \frac{\partial c}{\partial \rho}, \quad z = \frac{\rho_0^3}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \left( \frac{c^2}{\rho} \right). \quad (13.6)$$

Дифференциальное эффективное сечение для рассматриваемого процесса представляется соотношением

$$\left. \begin{aligned} d\sigma(p, p_1, p', p'_1) &= \\ &= (2\pi/\hbar c) |H'_{AF}|^2 \delta(\varepsilon + \varepsilon_1 - \varepsilon' - \varepsilon'_1) (2\pi\hbar)^{-3} dp', \\ dp' &= dp'_x dp'_y dp'_z. \end{aligned} \right\} \quad (13.7)$$

Из сказанного выше следует, что эффективное сечение рассеяния фонона фононом достигает наибольшего значения при малых углах между импульсами сталкивающихся фононов. Из законов сохранения импульса и энергии следует, что такой процесс рассеяния, не приводя к существенному изменению направлений импульсов сталкивающихся фононов, обеспечивает быстрый обмен энергиями между фононами. Таким образом, рассеяние фононов фононами под малыми углами способствует установлению энергетического равновесия в фононной системе. Попытаемся оценить время релаксации, характеризующее этот процесс.

Точное вычисление этого времени произвести невозможно по той простой причине, что сама задача не может быть

\*) При вычислении матричных элементов следует учесть все возможные перестановки фононов. Для этого необходимо умножить члены, содержащие  $\rho'^2$ , на 2, содержащие  $\rho'^3$ , — на 6, и наконец, содержащие  $\rho'^4$ , — на 24.

точно сформулирована. Поэтому мы произведем вычисление для двух предельных случаев. В первом случае будем предполагать, что каким-либо способом изменено число фононов, обладающих большими энергиями (больше, чем средняя энергия фононов), так что функция распределения в области больших частот не равна равновесной функции. Во втором случае аналогичным образом предполагаем, что функция распределения в области малых частот не равна равновесной.

Как оказывается, время релаксации фононов с предельными значениями энергии определяется интегралами, в которых существенную роль играют фононы со средней тепловой энергией. Поэтому оба предельных случая можно получить из некоторой общей формулы, которая верна только для предельных случаев и имеет интерполяционный характер для фононов со средней энергией. Рассмотрим кинетическое уравнение для фононов

$$\frac{\partial n}{\partial t} + v \nabla n = I(n), \quad (13.8)$$

где интеграл столкновений  $I(n)$  для процесса рассеяния фонона фононом равен

$$I(n) = - (2\pi\hbar)^{-3} \iint c \, d\sigma(p, p_1) \{ n n_1 (n' + 1) (n'_1 + 1) - n' n'_1 (n + 1) (n_1 + 1) \} d p_1. \quad (13.9)$$

Изменим равновесное число фононов  $n = n_0$  на величину  $\delta n$  при заданном равновесном распределении остальных фононов. Воспользовавшись известными свойствами равновесных функций распределения, преобразуем выражение, стоящее в фигурной скобке в (13.9):

$$\{ (n_0 + \delta n) (n' + 1) (n'_1 + 1) n_1 - n'_1 n'_1 (n_1 + 1) (n_0 + 1 + \delta n) \} = \delta n n' n'_1 (n_1 + 1) / n. \quad (13.10)$$

Подставим в интеграл столкновений полученное выражение, имеем

$$I(n) = - (2\pi\hbar)^{-3} \delta n \iint n^{-1} n'_1 n' (n_1 + 1) c \, d\sigma(p, p_1) d p_1. \quad (13.11)$$

Таким образом, время релаксации фононов определяется соотношением

$$\frac{1}{t_{ph}} = (2\pi\hbar)^{-3} \iint n^{-1} n'_1 n' (n_1 + 1) c \, d\sigma(p, p_1) d p_1. \quad (13.12)$$

Теперь необходимо в (13.12) подставить выражение (13.7) для  $d\sigma(p, p_1)$  и произвести все необходимые интегрирования. Благодаря тому, что матричный элемент  $H'_{AF}$  имеет острый максимум при малых углах между импульсами сталкивающихся фононов, интегрирование по углам сильно упрощается. В результате довольно длинных вычислений получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{t_{ph}} = & \frac{(u+1)^4}{192\pi^3 \gamma c p_0^2} \frac{1}{p} \int d p_1 d p' d p'_1 \delta(p + p_1 - p' - p'_1) n^{-1} n' n'_1 \times \\ & \times (n_1 + 1) p_1 p'_1 \{ p^2 \eta(p'_1 - p) \eta(p' - p) + p_1^2 \eta(p_1 - p') \times \\ & \times \eta(p_1 - p'_1) + p'^2 \eta(p'_1 - p) \eta(p - p') + p_1^2 \eta(p' - p) \times \\ & \times \eta(p - p'_1) \}. \end{aligned} \quad (13.13)$$

Здесь  $\eta(x)$  — ступенчатая функция, равная 1 ( $x > 0$ ) или 0 ( $x < 0$ ). Фигурная скобка в (13.13) равна всегда  $p_{\min}^3$ , где  $p_{\min}$  — наименьший из импульсов. В интеграле (13.13) существенную роль играют фононы со средней тепловой энергией порядка  $3kT$ . Тем самым подтверждается справедливость формулы (13.12) для предельных случаев.

Интегрирование в (13.13) легко выполняется в этих двух интересующих нас предельных случаях: для случая больших ( $pc \gg kT$ ) и малых энергий ( $pc \ll kT$ ). Для этих случаев имеем ( $x = pc/kT$ )

$$\frac{1}{t_{ph}} = \frac{4,15(u+1)^4}{192\pi^3 \gamma c p_0^2} \left( \frac{kT}{\hbar c} \right)^7 x^2 \left( 1 + 14,7 \frac{1}{x} \right) \quad (x \gg 1), \quad (13.14)$$

$$\frac{1}{t_{ph}} = \frac{8,66(u+1)^4}{192\pi^3 \gamma c p_0^2} \left( \frac{kT}{\hbar c} \right)^7 x^3. \quad (13.15)^*$$

\*) Формула (13.15) имеет очень ограниченную область применимости, так как для ее справедливости необходимо выполнение неравенств  $1 \gg x^3 \gg \gamma p^2$ .

В кинетических явлениях, таких, как вязкость, теплопроводность, как будет видно ниже, играют роль фононы с энергией порядка  $7 \div 8 kT$ , время релаксаций которых определяется формулой (13.14). Подставив в формулу (13.14) численные значения всех параметров, получаем

$$\frac{1}{t_{ph}} \approx 6 \cdot 10^6 T^7 x^2 (1 + 14,7/x). \quad (13.16)$$

Сравнение полученного времени с другими временами, характеризующими различные другие процессы, показывает, что установление энергетического равновесия в фоновом газе происходит очень быстро. Таким образом, во всех случаях можно предполагать наличие в нем энергетического равновесия.

#### § 14. Рассеяние фонона ротоном

Вычислим эффективное сечение рассеяния фонона ротоном. Ротон, находящийся в фоновом поле, можно рассматривать как частицу в движущейся среде. Этому соответствует появление в энергии ротона дополнительного члена —  $pv$ , или в симметризованном виде

$$-\frac{1}{2}(pv + vp). \quad (14.1)$$

Здесь  $p$  — оператор импульса ротона,  $v$  — оператор поля скоростей фонона (12.4). Наличие фоновом поля также связано с изменением плотности среды. Разложив энергию ротона в ряд по плотности  $\rho'$  до членов второго порядка, находим

$$H_r = H_{r0} + \frac{\partial \Delta}{\partial \rho} \rho' + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial p_0}{\partial \rho} \right)^2 \right] \rho'^2. \quad (14.2)$$

$H_{r0}$  — энергия ротона в отсутствие фонона,  $\rho'$  — оператор плотности фонона (12.4). В разложении (14.2) мы пренебрегаем членами, содержащими разность  $p - p_0$ , так как большинство ротонов имеет импульс  $p$ , близкий к  $p_0$ . Член с производной  $\partial \Delta / \partial \rho$  (14.2) мы также в дальнейшем не будем удерживать, так как он заведомо меньше члена (14.1). Таким образом, окончательно энергия взаимодействия фо-

нон — ротон записывается в виде

$$V = -\frac{1}{2}(pv + vp) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial p_0}{\partial \rho} \right)^2 \right] \rho'^2. \quad (14.3)$$

Процесс рассеяния фонона ротоном является двухфононным, потому интересующие нас переходы получаются из линейного члена по  $v$  в (14.3) во втором порядке теории возмущений и в первом порядке из квадратичных (по  $\rho'$ ) членов \*).

Так, вычисленная амплитуда перехода для рассматриваемого процесса, с учетом малости импульса фонона  $p$  по сравнению с импульсом ротона  $p_0$  и малости энергии фонона по сравнению с  $\mu c^2$ , имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \langle n | H | n' \rangle &= \\ &= \frac{p_0 p}{2\rho_0} \left\{ (n + n', m)(nn') + \frac{p_0}{\mu c} (nm)^2 (n'm)^2 + A^2 \right\}, \\ A &= \frac{p_0^2}{\rho_0 c} \left[ \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial p_0}{\partial \rho} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (14.4)$$

Здесь  $n$  и  $n'$  — единичные векторы в направлении импульсов падающего и рассеянного фононов,  $m$  — единичный вектор в направлении импульса ротона.

Из законов сохранения энергии и импульса следует, что рассеяние фонона на ротоне подобно рассеянию легкой частицы тяжелой. Величина импульса фонона и направление импульса ротона практически при рассеянии не меняются. С помощью (14.4) находим эффективное

\*) Тот факт, что уравнения гидродинамики являются нелинейными, несколько усложняет картину. Действительно, если решать уравнения гидродинамики методом последовательных приближений, то из суперпозиции плоских волн, имеющих в первом приближении, во втором приближении мы получим члены, содержащие произведения фононных амплитуд. Поэтому уже в первом приближении теории возмущений первый член в (14.3) сможет давать нужные переходы. Более подробный анализ этого вопроса, однако, показывает, что скорость  $v$  во втором приближении содержит произведение амплитуд с множителем  $p - p'$ , где  $p$  и  $p'$  — начальный и конечный импульсы фонона. Поскольку импульс фонона много меньше импульса ротона  $p_0$ , то рассеяние, как это следует из законов сохранения, происходит упругим образом, так что  $p \approx p'$ . И следовательно, указанным эффектом можно пренебречь.



дифференциальное сечение

$$d\sigma = \left( \frac{p_0 p^2}{4\pi \hbar^2 p_0 c} \right)^2 \left\{ (n + n', m)(nn') + \right. \\ \left. + \frac{p_0}{\mu c} (mn)^2 (mn')^2 + A^2 \right\} d\omega'. \quad (14.5)$$

Усреднив сечение по всем направлениям импульса ротонов, окончательно получаем

$$d\sigma = \left( \frac{p_0 p^2}{4\pi \hbar^2 p_0 c} \right)^2 \left\{ \frac{2}{3} (1 + \cos \psi) \cos^2 \psi + \right. \\ \left. + \frac{1}{105} \left( 1 + 8 \cos^2 \psi + \frac{8}{3} \cos^4 \psi \right) \left( \frac{p_0}{\mu c} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{2A}{15} \left( \frac{p_0}{\mu c} \right) (1 + 2 \cos^2 \psi) + A^2 \right\} d\omega'. \quad (14.6)$$

Входящий в формулу угол  $\psi$  образован направлениями импульсов падающего и рассеянного фононов. Полное сечение находится интегрированием (14.6) по всем углам рассеяния:

$$\sigma_{phr} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{p_0 p^2}{\hbar p_0 c} \right)^2 \left\{ \frac{2}{9} + \frac{1}{25} \left( \frac{p_0}{\mu c} \right)^2 + \frac{2A}{9} \frac{p_0}{\mu c} + A^2 \right\}. \quad (14.7)$$

Приведем приближенные значения производных от параметров спектра по плотностям, найденные из анализа экспериментальных данных:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \ln p_0}{\partial \ln \rho} &\approx 0,4, & \frac{\partial \ln \Delta}{\partial \ln \rho} &\approx -0,57, \\ \frac{\rho^2}{\Delta} \frac{\partial^2 \Delta}{\partial \rho^2} &\approx -5,2, & \frac{\partial \ln \mu}{\partial \ln \rho} &\approx -2,1. \end{aligned} \right\} \quad (14.8)$$

## § 15. Рассеяние ротонов ротоном

Теория не дает никаких сведений о характере взаимодействия ротонов друг с другом. Однако для вычисления температурной зависимости характерных для процесса рассеяния ротонов ротоном времен оказывается достаточным знания соответствующей вероятности с точностью до постоянного множителя. Такая вероятность мало чувствительна к выбору вида энергии взаимодействия. Мы выбираем энергию взаимодействия ротонов в виде  $\delta$ -функции от рас-

стояния между ротонами

$$V = V_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1), \quad (15.1)$$

$\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}_1$  — радиус-векторы ротонов,  $V_0$  — некоторая постоянная.

В качестве волновых функций выбираем плоские волны, симметризованные по парам сталкивающихся и рассеянных ротонов. С помощью таких волновых функций

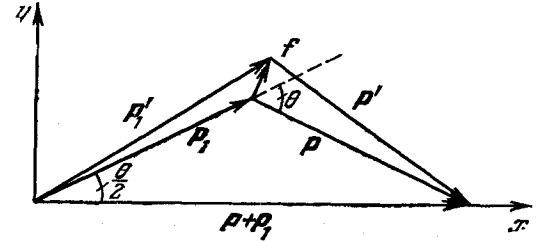


Рис. 3.

вычисляем матричный элемент перехода. Проинтегрировав квадрат модуля матричного элемента по фазовому объему одного из рассеянных ротонов, находим вероятность перехода  $dw$  в виде

$$dw = \frac{2\pi}{\hbar} |2V_0|^2 \delta(\varepsilon - \varepsilon_1 - \varepsilon' - \varepsilon'_1) \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (15.2)$$

Из вида энергетического спектра следует, что большинство ротонов будет обладать импульсами, по абсолютной величине близкими к  $p_0$ . Следовательно, изменения импульсов ротонов при рассеянии по своей величине будут значительно меньше  $p_0$ .

Пусть импульсы ротонов  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}_1$  до столкновения образуют угол  $\theta$ . Тогда из рис. 3 легко видеть, что импульсы ротонов после столкновения, вводя переменную  $\mathbf{f}$ , можно представить в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p}' &= p_0 - f_x \cos \frac{\theta}{2} + f_y \sin \frac{\theta}{2}, \\ \mathbf{p}_1' &= p_0 + f_x \cos \frac{\theta}{2} + f_y \sin \frac{\theta}{2}, \end{aligned} \right\} \quad (15.3)$$

причем  $|f| \ll p_0$ .

В новых переменных элемент фазового объема сводится к

$$dp' = 2\pi p_0 \sin \frac{\theta}{2} df_x df_y, \quad (15.4)$$

а закон сохранения энергии — к

$$f_x^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + f_y^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} (p - p_0)^2 + \frac{1}{2} (p_1 - p_0)^2. \quad (15.5)$$

Для вычисления полной вероятности рассеяния ротоном необходимо произвести в (15.2) интегрирование по фазовому объему рассеянной частицы. В выражении (15.3) от координат в фазовом пространстве зависит только  $\delta$ -функция, содержащая закон сохранения энергии.

Если для удобства интегрирования ввести вспомогательную переменную  $g$  при помощи соотношения

$$g^2 = f_x^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} + f_y^2 \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

то с учетом (15.4) и (15.5) указанное интегрирование  $\delta$ -функции по фазовому объему рассеянной частицы с учетом тождественности ротонов производится весьма просто, и в результате получаем

$$w = \frac{p_0 \mu |V_0|^2}{\hbar^4 \cos^2 \frac{\theta}{2}}. \quad (15.6)$$

Обратная величина среднего времени  $t_r$  между двумя соударениями ротона получается из (15.6) умножением на плотность ротонов  $N_r$ , определяемую формулой (3.8), и усреднением по всем углам, образованным импульсами сталкивающихся ротонов. Таким образом, находим

$$\frac{1}{t_r} = \frac{2p_0 \mu |V_0|^2 N_r}{\hbar^4}. \quad (15.7)$$

Постоянная  $|V_0|^2$  по данным о вязкости гелия равна приблизительно  $6,3 \cdot 10^{-76}$  (эрг·см<sup>3</sup>)<sup>2</sup>.

## § 16. Поглощение и испускание фононов и ротонов

При соударениях элементарных возбуждений возможны неупругие процессы, сопровождающиеся изменением числа квазичастиц. Подобные процессы можно разделить на три типа:

- а) процессы испускания (или поглощения) фононов;
- б) процессы взаимного превращения ротонов в фононы;
- в) процессы испускания (или поглощения) ротонов.

Мы будем интересоваться процессами, наиболее вероятными для каждого типа.

Наиболее вероятный из процессов типа а) — пятифононный процесс, в котором два фонона превращаются в три. Вероятность такого процесса вычисляется по теории возмущений аналогично четырехфононному процессу. Интересующая нас амплитуда перехода получается в третьем порядке теории возмущений из ангармонических членов  $V_3$  (13.2), из членов  $V_4$  и  $V_5$  во втором порядке и членов пятого порядка в первом приближении. При этом в суммах по промежуточным состояниям также возникают резонансные знаменатели, когда импульсы начальных и промежуточных фононов имеют близкие направления. Поэтому наибольший вклад дают члены третьего порядка теории возмущений, имеющие по два резонансных знаменателя. При этом дисперсия спектра фононов оказывается существенной, так как лишь учет ее обеспечивает сходимость угловых интегралов. Мы не будем производить полное вычисление вероятности пятифононного процесса, поскольку основной параметр дисперсии  $\gamma$  в ответ входит в квадрате и плохо известен. Для выяснения же температурной зависимости соответствующих кинетических коэффициентов достаточно знать зависимость вероятности от импульсов фононов. Несложные оценки позволяют заключить, что средняя по углам вероятность пятифонного процесса пропорциональна кубу некоторого импульса:

$$\bar{w} \sim p^3. \quad (16.1)$$

Какие конкретно импульсы входят в  $w$ , оказывается в дальнейшем несущественным. Пусть полное число фононов в единице объема (вообще не равное равновесному) есть

$N_{ph}$ . Скорость изменения числа фононов благодаря пяти-фононному процессу может быть записана в виде

$$\dot{N}_{ph} = - \iiint \{n_1 n_2 n_3 (n_4 + 1) (n_5 + 1) - (n_1 + 1) (n_2 + 1) (n_3 + 1) n_4 n_5\} dw \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3}{(2\pi\hbar)^9}. \quad (16.2)$$

Если полное число фононов не равно равновесному, то это означает, что функции распределения  $n$  содержат не равный нулю химический потенциал  $\mu_{ph}$ :

$$n = \{\exp[(\varepsilon - \mu_{ph})/kT] - 1\}^{-1}.$$

При малых отклонениях от равновесия разложим функцию  $n$  по степеням  $\mu_{ph}$ , ограничиваясь линейным по  $\mu_{ph}$  членами; имеем:

$$n - n_0 = \frac{n_0(n_0 + 1)\mu_{ph}}{kT}. \quad (16.3)$$

Функция  $n$  с индексом нуль соответствует равновесным функциям распределения для фононов ( $\mu_{ph} = 0$ ). После несложных преобразований с помощью (16.3) соотношение (16.2) принимает вид

$$\dot{N}_{ph} = - \iiint n_{10} n_{20} n_{30} (n_{40} + 1) \times \times (n_{50} + 1) dw \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3}{(2\pi\hbar)^9} \frac{\mu_{ph}}{kT}.$$

Обозначив коэффициент в равенстве, связывающем скорость изменения  $N_{ph}$  с величиной  $\mu_{ph}$ , через  $\Gamma_{ph}$ , имеем

$$\Gamma_{ph} = \frac{1}{kT} \iiint n_{10} n_{20} n_{30} (n_{40} + 1) \times \times (n_{50} + 1) dw \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3}{(2\pi\hbar)^9}. \quad (16.4)$$

Без большого ущерба для точности в подынтегральном выражении в (16.4) можно пренебречь функциями распределения  $n_{40}$  и  $n_{50}$  по сравнению с единицей. Тогда интегрирование по фазовым объемам импульсов трех сталкивающихся фононов ( $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  и  $\mathbf{p}_3$ ) производится независимо, что

позволяет заменить  $dw$  на  $\bar{w}$ , опустив при этом одно интегрирование. Таким образом, получаем

$$\Gamma_{ph} \approx \frac{1}{kT} \iiint n_{10} n_{20} n_{30} \bar{w} \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}_3}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (16.5)$$

Подынтегральное выражение в (16.5) пропорционально  $p^{12}$ . После интегрирования в (16.5) по фазовым объемам сталкивающихся фононов получаем температурный закон для  $\Gamma_{ph}$ :

$$\Gamma_{ph} = a T^{11}, \quad (16.6)$$

где  $a$  — не зависящий от температуры коэффициент.

Полученное соотношение (16.6) устанавливает температурную зависимость именно той величины, которая существенно войдет в дальнейшие вычисления.

Из анализа экспериментальных данных по поглощению звука коэффициент  $a$  равен примерно  $1 \cdot 10^{43} (\text{эрг} \cdot \text{сек} \cdot \text{см}^3)^{-1}$ .

Перейдем к процессу б). Прямое превращение фонона в ротон, очевидно, невозможно, так как импульс фонона  $p$  много меньше импульса ротона  $p_0$ . При столкновении энергичного фонона (с энергией порядка  $\Delta$ ) с ротоном возможно образование двух ротонов. При этом угол между направлениями импульсов возникающих ротонов не должен быть слишком мал, как это следует из закона сохранения импульса. Как и в предыдущем случае, можно произвести оценку вероятности такого процесса. Для оценки можно считать, что фонон большой энергии взаимодействует с ротоном подобно ротону, т. е. энергия взаимодействия фонон — ротон в этом случае имеет вид  $\delta$ -функции (15.1). Подобно предыдущему, скорость приближения числа ротонов и фононов к равновесным значениям выражается через соответствующие химические потенциалы

$$\dot{N}_r = -\Gamma_{phr}(\mu_r - \mu_{ph}), \quad \dot{N}_{ph} = \Gamma_{phr}(\mu_r - \mu_{ph}). \quad (16.7)$$

Коэффициент  $\Gamma_{phr}$  определяется полным интегралом столкновений, связанным с рассматриваемым процессом превращения фонона в ротон (и обратно). Не останавливаясь на промежуточных выкладках, приведем окончательный результат:

$$\Gamma_{phr} = \frac{|V_0|^2 \Delta^2 N_r^2}{\pi \hbar^4 c^2 kT}. \quad (16.8)$$

Амплитуда  $V_0$  для рассматриваемого процесса неизвестна, однако если взять в качестве  $V_0$  его значения для взаимодействия ротон — ротон, то, очевидно, мы получим верхнюю оценку величины  $\Gamma_{phr}$ . Для дальнейших исследований кинетических процессов мы выделим из  $\Gamma_{phr}$  его температурную зависимость и запишем (16.8) в виде

$$\Gamma_{phr} = be^{-\frac{2\Delta}{T}}. \quad (16.9)$$

Что касается процесса в), т. е. превращения двух ротонов в три (и наоборот), то ввиду сильного запрета как по энергиям, так и по импульсам он оказывается маловероятным и в интересующих нас явлениях не играет роли.

## ГЛАВА V

### ГИДРОДИНАМИКА СВЕРХТЕКУЧЕЙ ЖИДКОСТИ [12]

#### § 17. Вывод уравнений двухскоростной гидродинамики

Используя микроскопические представления о сверхтекучей жидкости, изложенные выше, можно построить полную систему гидродинамических уравнений. Основные положения, на которых будем базироваться, заключаются в следующем. Упорядоченное движение возбуждений увлекает за собой часть жидкости, характеризующуюся «нормальной» плотностью  $\rho_n$ . Остающаяся часть, «сверхтекучая», характеризующаяся плотностью  $\rho_s = \rho - \rho_n$ , при этом совершает независимое движение, и что очень важно, это последнее является потенциальным. Таким образом, в сверхтекучей жидкости одновременно могут происходить два независимых движения — нормальное и сверхтекучее — со скоростями соответственно  $v_n$  и  $v_s$ , причем

$$\text{rot } v_s = 0. \quad (17.1)$$

Условие потенциальности сверхтекучего движения (17.1) не должно нарушаться до тех пор, пока скорости движения не достигнут критических значений, когда возникает взаимодействие нормальной и сверхтекучей частей жидкости.

После этих замечаний полная система гидродинамических уравнений может быть получена, исходя из одних только законов сохранения и принципа относительности Галилея,

Закон сохранения какой-либо величины имеет универсальную форму дифференциального вида: производная по времени от сохраняющейся величины равна дивергенции некоторого вектора.

Закон сохранения массы жидкости связывает плотность  $\rho$  и поток  $j$  (импульс единицы объема) уравнением непрерывности

$$\dot{\rho} + \operatorname{div} j = 0. \quad (17.2)$$

Закон сохранения импульса дает уравнение движения

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial r_k} = 0, \quad (17.3)$$

где  $\Pi_{ik}$  есть тензор потока импульса.

Вначале мы не будем рассматривать диссипативные процессы. Тогда движение происходит обратимым образом, и энтропия  $S$  сохраняется. Поэтому можно написать

$$\dot{S} + \operatorname{div} F = 0, \quad (17.4)$$

где  $F$  — вектор потока энтропии. Поскольку энтропия связана только с возбуждениями, то она должна переноситься нормальным движением. Следовательно, поток энтропии равен  $Sv_n$ . Однако мы не будем в данном пункте ссылаться на микроскопическую картину и покажем, что соотношение  $F = Sv_n$  следует из законов сохранения. Поэтому пока  $F$  для нас будет оставаться некоторой неизвестной величиной, подлежащей определению.

В сверхтекучей жидкости возможны два движения и соответственно в гидродинамике должно быть два уравнения движения. Одним из них является уравнение (17.3), второе уравнение определяет производную по времени от  $v_s$ . Поскольку  $\operatorname{rot} v_s = 0$ , то можно написать

$$\dot{v}_s + \nabla \left( \phi + \frac{v_s^2}{2} \right) = 0, \quad (17.5)$$

где  $\phi$  — некоторая скалярная функция.

Уравнения (17.2) — (17.5) представляют собой полную систему гидродинамических уравнений сверхтекучей жидкости. Однако смысл они могут приобрести лишь после того, как будет выяснен вид неизвестных членов  $\Pi_{ik}$ ,  $F$  и  $\phi$ .

Для определения вида этих членов мы воспользуемся законом сохранения энергии, который в дифференциаль-

ной форме записывается в виде

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div} Q = 0, \quad (17.6)$$

где  $E$  — энергия единицы объема жидкости;  $Q$  — поток энергии. Необходимо, чтобы неизвестные члены в уравнениях (17.2) — (17.5) были выбраны таким образом, чтобы уравнение (17.6) выполнялось автоматически. Кроме того, мы воспользуемся принципом относительности Галилея, позволяющим выяснить зависимость всех величин от скорости  $v_s$  при заданном значении разности  $v_n - v_s$ .

Для дальнейшего удобно ввести новую систему отсчета ( $K_0$ ), в которой скорость сверхтекучего движения данного элемента жидкости равна нулю. Система отсчета  $K_0$  движется относительно исходной  $K$  со скоростью  $v_s$ . Значения интересующих нас величин связаны в рассматриваемых системах известными соотношениями\*):

$$j = \rho v_s + j_0, \quad (17.7)$$

$$\Pi_{ik} = \rho v_{si} v_{sk} + v_{si} j_{0k} + v_{sk} j_{0i} + \pi_{ik}, \quad (17.8)$$

\*) Формулы (17.7) — (17.11) следуют непосредственно из принципа относительности Галилея. Покажем, например, как получается соотношение (17.8) для обычной жидкости. Тензор потока импульса в обычной гидродинамике равен

$$\Pi_{ik} = \rho u_i u_k + p \delta_{ik}$$

( $u$  — скорость,  $p$  — давление). Скорость жидкости  $u$  в неподвижной системе связана со скоростью  $u'$  в системе, движущейся со скоростью  $v$ :  $u = u' + v$ . Подстановка  $u$  в выражение для  $\Pi_{ik}$  дает

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + \rho u'_i v_k + \rho u'_k v_i + (\rho u'_i u'_k + p \delta_{ik}).$$

Обозначив импульс единицы объема жидкости в движущейся системе отсчета буквой  $j_0$ , окончательно находим искомое соотношение

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + v_i j_{0k} + v_k j_{0i} + \pi_{ik}.$$

Естественно, что полученная формула сохраняет свой вид и в гидродинамике сверхтекучей жидкости. Остальные формулы получаются аналогичным путем.

$$E = \frac{\rho v_s^2}{2} + v_s j_0 + E_0, \quad (17.9)$$

$$Q = \left( \frac{\rho v_s^2}{2} + v_s j_0 + E_0 \right) v_s + \frac{v_s^2}{2} j_0 + \pi v_s + q, \quad (17.10)$$

$$F = S v_s + f. \quad (17.11)$$

Здесь  $j_0$  — импульс,  $\pi_{ik}$  — тензор потока импульса,  $E_0$  — энергия,  $q$  — вектор потока энергии,  $f$  — поток энтропии в системе  $K_0$ .

В системе  $K_0$  жидкость движется со скоростью  $v_n - v_s$ , и, очевидно, все величины ( $j_0, \pi_{ik}, E_0, q, f$ ) могут зависеть только от указанной разности. Для энергии  $E_0$  имеет место термодинамическое тождество

$$dE_0 = T dS + \mu dp + (v_n - v_s, dj_0). \quad (17.12)$$

Здесь  $\mu$  — химический потенциал,  $T$  — температура. Третий член в формуле (17.12) выразит просто тот факт, что скорость есть производная энергии по импульсу, и его следует рассматривать как определение скорости  $v_n$ . Из соображений симметрии следует, что вектор  $j_0$  может быть направлен только по  $v_n - v_s$ ; таким образом, можно записать

$$j_0 = \rho_n (v_n - v_s). \quad (17.13)$$

Соотношение (17.13) следует рассматривать как определение нормальной плотности  $\rho_n$ . Из (17.7) и (17.13) следует тогда соотношение

$$j = \rho_s v_s + \rho_n v_n, \quad (17.14)$$

где  $\rho_s = \rho - \rho_n$ .

Идея дальнейшего вывода состоит в следующем. Дифференцируем энергию  $E$  по времени и выражаем все производные от термодинамических величин,  $j$  и  $v_s$  — по времени, используя уравнения (17.2) — (17.5). Затем вычисляем  $\text{div } Q$ , используя формулу (17.10), и подставляем  $\dot{E}$  и  $\text{div } Q$  в уравнение (17.6). После значительных сокра-

щений получаем

$$\begin{aligned} \text{div } q = & - (m \nabla) v_s + (v_n - v_s) (\nabla m) + j_0 (v_n - v_s, \nabla) v_n + \\ & + (j_0 - S (v_n - v_s)) \nabla (\varphi - \mu) - \nabla T (f - S (v_n - v_s)) + \\ & + \text{div } (f T + j_0 \mu). \end{aligned} \quad (17.15)$$

При этом вместо  $\pi_{ik}$  введен другой тензор

$$m_{ik} = \pi_{ik} + [E_0 - TS - \mu \rho - (v_n - v_s, j_0)] \delta_{ik}. \quad (17.16)$$

При отсутствии диссипации энергии величины  $m_{ik}$ ,  $q$ ,  $f$  и  $\varphi$  являются функциями термодинамических переменных и скоростей и не зависят от их производных по времени и координатам. Это обстоятельство позволяет однозначным образом получить из (17.15) выражение для искомых величин

$$\left. \begin{aligned} m_{ik} = j_{0i} (v_{nk} - v_{sk}), \quad f = S (v_n - v_s), \quad \varphi = \mu, \\ q = T f + \mu j_0 - (v_n - v_s, v_s) j_0 + (v_n - v_s) (v_n j_0). \end{aligned} \right\} \quad (17.17)$$

Далее окончательно получаем

$$F = f + S v_s = S v_n, \quad (17.18)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{ik} = \rho v_{si} v_{sk} + v_{si} j_{0k} + v_{nk} j_{0i} - \\ - [E_0 - TS - \mu \rho - (v_n - v_s, j_0)] \delta_{ik}, \end{aligned} \quad (17.19)$$

$$Q = \left( \mu + \frac{v_s^2}{2} \right) (j_0 + \rho v_s) + S T v_n + v_n (v_n j_0). \quad (17.20)$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках в (17.19), представляет собой полное давление, которое, по определению, равно производной от полной энергии жидкости по объему при постоянных полной массе, полной энтропии и полном импульсе относительного движения

$$p = - \frac{\partial (E_0 V)}{\partial V} = - E_0 + TS + \mu \rho + (v_n - v_s, j_0). \quad (17.21)$$

Подставив полученные выражения для  $F$ ,  $\varphi$  и  $\Pi_{ik}$  в уравнения (17.3) — (17.5), получим полную систему

гидродинамических уравнений сверхтекучей жидкости

$$\dot{\rho} + \operatorname{div} j = 0, \quad (17.22)$$

$$\frac{\partial j}{\partial t} + v_s \operatorname{div} j + (j \nabla) v_s + j_0 \operatorname{div} v_n + (\dot{v}_n \nabla) j_0 + \nabla p = 0, \quad (17.23)$$

$$\dot{S} + \operatorname{div} S v_n = 0, \quad (17.24)$$

$$\dot{v}_s + \nabla \left( \frac{v_s^2}{2} + \mu \right) = 0. \quad (17.25)$$

Тензор потока импульса  $\Pi_{ik}$  с учетом (17.14) можно переписать в виде

$$\Pi_{ik} = \rho_n v_{ni} v_{nk} + \rho_s v_{si} v_{sk} + p \delta_{ik}, \quad (17.19')$$

где первый член представляет собой поток импульса нормального движения, а второй — поток импульса сверхтекучего движения. Полученные уравнения гидродинамики (17.22) — (17.25) довольно сложны, поскольку входящие сюда величины  $\mu$ ,  $\rho_n$ ,  $S$  и т. д. являются функциями относительной скорости  $v_n - v_s$ , вид которых может быть найден лишь с привлечением микроскопической теории.

Общие гидродинамические уравнения заметно упрощаются в случае не слишком больших скоростей. Следует иметь в виду, что свойство сверхтекучести нарушается при скоростях, превышающих некоторое критическое значение. Однако в нестационарных условиях, например при распространении звука, скорости могут значительно превосходить критическое значение. Таким образом, существуют области применения общих уравнений, где проявляется нелинейный характер уравнений (см. гл. VII). Если ограничиться квадратичными членами относительно скоростей, то можно пренебречь зависимостью  $\rho_n$  и  $\rho_s$  от скоростей. Выбираем в качестве независимых термодинамических переменных давление  $p$  и температуру  $T$ .

Запишем термодинамическое тождество для химического потенциала; согласно (17.12) и (17.21) имеем

$$\left. \begin{aligned} d\mu &= -\alpha dT + \frac{1}{\rho} dp - \frac{\rho_n}{\rho} (v_n - v_s) d(v_n - v_s), \\ \varphi &= \frac{S}{\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (17.26)$$

Отсюда легко находится зависимость энтропии  $\sigma$  и плотности от относительной скорости  $w = v_n - v_s$ . Из общих соотношений для производных

$$\frac{\partial \sigma}{\partial (w^2)} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial T} \frac{\rho_n}{\rho}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial (w^2)} = \rho^2 \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p} \frac{\rho_n}{\rho}, \quad (17.27)$$

находим первые члены в разложении  $\sigma$  и  $\rho$  по  $w^2$ :

$$\sigma(p, T, w) = \sigma(p, T) + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial}{\partial T} \frac{\rho_n}{\rho}, \quad (17.28)$$

$$\rho(p, T, w) = \rho(p, T) + \frac{1}{2} \rho^2 w^2 \frac{\partial}{\partial p} \frac{\rho_n}{\rho}. \quad (17.29)$$

Подставив эти выражения в общие уравнения (17.22) — (17.25), получим уравнения, справедливые с точностью до членов второго порядка:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho + \frac{1}{2} w^2 \rho^2 \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{\rho_n}{\rho} \right) \right) + \operatorname{div} j = 0, \quad j = \rho_s v_s + \rho_n v_n, \quad (17.30)$$

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial r_k} = 0, \quad \Pi_{ik} = \rho_s v_{si} v_{sk} + \rho_n v_{ni} v_{nk} + p \delta_{ik}, \quad (17.31)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ S + \frac{\rho w^2}{2} \left( \frac{\partial}{\partial T} \frac{\rho_n}{\rho} + S \frac{\partial}{\partial p} \frac{\rho_n}{\rho} \right) \right] + \operatorname{div} S v_n = 0, \quad (17.32)$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} + \nabla \left[ \mu + \frac{v_s^2}{2} - \frac{\rho_n w^2}{2\rho} \right] = 0. \quad (17.33)$$

В формулу (17.33) входит химический потенциал  $\mu$  неподвижной жидкости. В полученных приближенных уравнениях скорости считаются малыми по сравнению со скоростями первого и второго звука. Общие уравнения также заметно упрощаются в случае, когда скорости малы лишь по сравнению со скоростью первого звука и сравнимы по величине со скоростью второго звука. В этом последнем случае возможно найти общее решение в виде одномерной бегущей волны. Заметное упрощение происходит ввиду слабой зависимости нормальной плотности  $\rho_n$  от квадрата относительной скорости  $w^2$ .

Остановимся теперь на граничных условиях, налагаемых на термодинамические величины. Очевидно, что

нормальная компонента потока  $j$  на стенке должна обращаться в нуль, поскольку не может быть переноса вещества через границу. Что касается скорости нормального движения  $v_n$ , то она связана с движением газа возбуждений, который обладает всеми свойствами вязкой жидкости. Поэтому тангенциальная компонента  $v_n$  на поверхности твердого тела должна быть равна нулю. Нормальная же компонента  $v_n$  (по оси  $z$ ) не равна нулю и определяет поток тепла от жидкости к твердому телу согласно (17.20); этот поток при  $j_z = 0$  равен  $STv_{nz}$ . При этом непрерывными остаются нормальные компоненты потока тепла в жидкости и в твердом теле. Температуры жидкости и твердого тела на границе испытывают скачок (см. § 52), пропорциональный величине теплового потока.

Выберем оси  $x$  и  $y$  вдоль поверхности твердого тела, а ось  $z$  перпендикулярно ей. Тогда указанные граничные условия запишутся в следующем виде:

$$\rho_s v_{sz} + \rho_n v_{nz} = 0, \quad v_{nx} = v_{ny} = 0, \quad (17.34)$$

$$STv_{nz} = -\kappa_{\text{ТВ}} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{\text{ТВ}}, \quad T_{\text{ж}} - T_{\text{ТВ}} = Kq_z. \quad (17.35)$$

Здесь  $\kappa_{\text{ТВ}}$  — коэффициент теплопроводности твердого тела (о смысле коэффициента  $K$  см. подробнее § 52).

Во многих случаях теплопроводностью твердого тела можно пренебречь. В этом случае можно  $\kappa_{\text{ТВ}}$  положить равным нулю, и мы имеем

$$v_{nz} = 0, \quad v_{sz} = 0, \quad (17.36)$$

т. е. имеем граничные условия для  $v_n$ , как у нормальной жидкости, и для  $v_s$ , как у идеальной жидкости.

Движущаяся сверхтекучая жидкость при наличии нормального к стенке потока вызывает тангенциальные силы, действующие на поверхность твердого тела. Это видно из того, что компонента потока импульса  $\Pi_{xz}$  в этом случае отлична от нуля. Действительно, используя первое из соотношений (17.34), находим указанную компоненту:

$$\Pi_{xz} = \rho_s v_{sx} v_{sz} + \rho_n v_{nx} v_{nz} = \rho_n v_{nz} (v_{nx} - v_{sx}).$$

Выразив компоненту  $v_{nz}$  через нормальную компоненту потока тепла  $q_z$ , окончательно получаем

$$\Pi_{xz} = \frac{\rho_n q_z}{ST} (v_{nx} - v_{sx}). \quad (17.37)$$

## § 18. Диссипативные члены в гидродинамических уравнениях [13]

Полученная в предыдущем параграфе система уравнений (17.22)–(17.25) описывает движение сверхтекучей жидкости в отсутствие диссипации энергии. Неравновесность приводит к появлению во всех потоках специфических членов, зависящих от производных по координатам от скоростей и термодинамических переменных. Следует обратить внимание на то, что в неравновесных условиях обычные определения термодинамических величин теряют смысл и нуждаются в уточнении. Если по-прежнему под  $\rho$  понимать массу единицы объема жидкости, а под  $j$  — ее импульс, то уравнение непрерывности сохраняет свой обычный вид

$$\dot{\rho} + \text{div } j = 0. \quad (18.1)$$

Далее, под  $E_0$  мы будем понимать энергию единицы объема в той системе отсчета, где сверхтекучая часть покоится. Остальные термодинамические переменные определяем, как те функции плотности  $\rho$ , энергии  $E$  и относительной скорости  $w$ , какими они являются в состоянии термодинамического равновесия. При этом энтропия  $S(\rho, E, w)$  не будет истинной энтропией, интеграл от которой  $\int S dV$  обязан возрастать со временем. Однако для слабо неравновесных условий, когда градиенты всех величин малы, так определенная энтропия практически будет совпадать с истинной энтропией. Действительно, легко видеть, что линейные по градиентам члены не могут присутствовать в разложении в ряд энтропии, так как они знакопеременны. Энтропия же равновесного состояния имеет максимально возможное значение. Поэтому разложение энтропии по малым градиентам начинается с квадратичных по градиентам членов, которыми с интересующей нас точностью можно пренебречь.



Закон сохранения импульса, как и ранее, записываем в виде

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_k} (\Pi_{ik} + \tau_{ik}) = 0, \quad (18.2)$$

с тем отличием, что в потоке импульса, кроме обычных членов (17.19), имеется неизвестный диссипативный член  $\tau_{ik}$ , подлежащий определению. Аналогично включаем дополнительный член  $\nabla h$  в уравнение сверхтекучего движения (17.25)

$$\dot{v}_s + \nabla \left( \mu + \frac{v_s^2}{2} + h \right) = 0 \quad (18.3)$$

(по-прежнему  $\text{rot } v_s = 0$ ).

Очевидно, что выражение для потока энергии  $Q$  в законе сохранения энергии также изменяется на некоторую величину  $Q'$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \text{div} (Q + Q') = 0. \quad (18.4)$$

Что касается энтропийного уравнения, то оно не имеет теперь вида уравнения непрерывности, поскольку энтропия не сохраняется, а возрастает. Мы воспользуемся требованием возрастания энтропии для определения неизвестных диссипативных членов. Дифференцируя по времени выражение (17.9) для  $E$ , имеем

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \left( \frac{v_s^2}{2} + \mu \right) \dot{\rho} + \dot{v}_s j + v_n \frac{\partial j_0}{\partial t} + T \dot{S}. \quad (18.5)$$

Далее исключаем производные по времени с помощью уравнений (18.1) — (18.3), в результате получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \text{div} \{ Q + q + h(j - \rho v_n) + (\tau v_n) \} = \\ = T \left( \dot{S} + \text{div} \left( S v_n + \frac{q}{T} \right) \right) + h \text{div} (j - \rho v_n) + \\ + \tau_{ik} \frac{\partial v_{ni}}{\partial r_k} + \frac{1}{T} q \nabla T. \end{aligned} \quad (18.6)$$

При этом, поскольку в неравновесных условиях в потоке энтропии может также появиться дополнительный член, мы для выяснения его вида к правой и левой частям (18.6) добавляем некоторый член  $\text{div } q$  с неизвестной величиной  $q$ .

Сравнив уравнение (18.6) с уравнением (18.4), получаем уравнение, определяющее скорость возрастания энтропии:

$$\begin{aligned} T \left( \frac{\partial S}{\partial t} + \text{div} \left( S v_n + \frac{q}{T} \right) \right) = \\ = -h \text{div} (j - \rho v_n) - \tau_{ik} \frac{\partial v_{ni}}{\partial r_k} - \frac{1}{T} q \nabla T, \end{aligned} \quad (18.7)$$

и выражение для дополнительного диссипативного потока тепла

$$Q' = q + h(j - \rho v_n) + \tau v_n. \quad (18.8)$$

Стоящее в правой части уравнения (18.7) выражение представляет собой диссипативную функцию сверхтекучей жидкости. Если пространственные производные от скоростей и термодинамических переменных невелики, то в первом приближении все добавки в уравнениях ( $\tau_{ik}$ ,  $h$ ,  $q$ ) являются линейными функциями от указанных производных. Из закона возрастания энтропии тогда следует, что диссипативная функция должна быть существенно положительной квадратичной формой от тех же производных. Из этого последнего требования немедленно следует вид неизвестных членов

$$\begin{aligned} \tau_{ik} = -\eta \left( \frac{\partial v_{ni}}{\partial r_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial r_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_{nl}}{\partial r_l} \right) - \\ - \delta_{ik} [\zeta_1 \text{div} (j - \rho v_n) + \zeta_2 \text{div} v_n], \end{aligned} \quad (18.9)$$

$$h = -\zeta_3 \text{div} (j - \rho v_n) - \zeta_4 \text{div} v_n, \quad (18.10)$$

$$q = -\kappa \nabla T. \quad (18.11)$$

В тензоре потока импульса  $\tau_{ik}$  мы, как обычно, выделяем комбинацию производных  $v_n$  со следом, равным нулю (первая вязкость).

В силу принципа симметрии Онзагера для кинетических коэффициентов имеет место соотношение

$$\zeta_1 = \zeta_4. \quad (18.12)$$

Коэффициенты  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$ ,  $\zeta_3$ ,  $\zeta_4$  имеют смысл коэффициентов второй вязкости. Всего, таким образом, имеется три

независимых коэффициента второй вязкости.  $\eta$  является коэффициентом первой вязкости, и он существенно связан с нормальным движением, а  $\kappa$  есть коэффициент теплопроводности. Как и следовало ожидать, коэффициента, аналогичного первой вязкости, для сверхтекучего движения не возникает.

Запишем теперь в окончательном виде уравнения гидродинамики сверхтекучей жидкости с учетом диссипативных членов:

$$\dot{\rho} + \operatorname{div} j = 0, \quad (18.13)$$

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial r_k} = \frac{\partial}{\partial r_k} \left\{ \eta \left( \frac{\partial v_{ni}}{\partial r_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial r_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_{nl}}{\partial r_l} \right) + \delta_{ik} \zeta_1 \operatorname{div} (j - \rho v_n) + \delta_{ik} \zeta_2 \operatorname{div} v_n \right\}, \quad (18.14)$$

$$\dot{v}_s + \nabla \left( \mu + \frac{v_s^2}{2} \right) = \nabla \{ \zeta_3 \operatorname{div} (j - \rho v_n) + \zeta_4 \operatorname{div} v_n \}, \quad (18.15)$$

$$\dot{S} + \operatorname{div} \left( S v_n + \frac{q}{T} \right) = \frac{1}{T} R. \quad (18.16)$$

Диссипативная функция равна

$$R = \zeta_2 (\operatorname{div} v_n)^2 + \zeta_3 (\operatorname{div} (j - \rho v_n))^2 + 2 \zeta_1 \operatorname{div} v_n \operatorname{div} (j - \rho v_n) + \frac{1}{2} \eta \left( \frac{\partial v_{ni}}{\partial r_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial r_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_{nl}}{\partial r_l} \right)^2 + \kappa \left( \frac{\nabla T}{T} \right)^2. \quad (18.17)$$

Для обеспечения положительности функции  $R$  кинетические коэффициенты  $\eta$ ,  $\zeta_2$ ,  $\zeta_3$  и  $\kappa$  должны быть положительными, а  $\zeta_1$  удовлетворять неравенству

$$\zeta_1^2 \leq \zeta_2 \zeta_3. \quad (18.18)$$

## § 19. О гидродинамических флуктуациях в сверхтекучей жидкости [14]

Для вычисления флуктуаций гидродинамических величин пользуемся общим методом, основанным на введении «сторонних» членов в уравнения движения. В уравнение движения (18.14) вводим сторонний тензор потока

импульса  $T_{ik}$ , в уравнение сверхтекучего движения (18.3) — сторонний потенциал  $H$  и в уравнение (18.6) — сторонний вектор потока тепла  $Q$ . Таким образом, имеем

$$\tau_{ik} = -\eta \left( \frac{\partial v_{ni}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_{nl}}{\partial x_l} \right) - \delta_{ik} [\zeta_1 \operatorname{div} (j - \rho v_n) + \zeta_2 \operatorname{div} v_n] + T_{ik}, \quad (19.1)$$

$$h = -\zeta_3 \operatorname{div} (j - \rho v_n) - \zeta_4 \operatorname{div} v_n + H; \quad (19.2)$$

$$q = -\kappa \nabla T + Q. \quad (19.3)$$

Согласно (18.7) скорость изменения полной энтропии равна

$$\dot{S}_{\text{пол}} = -\frac{1}{T} \int \left\{ h \operatorname{div} (j - \rho v_n) + \frac{1}{2} \tau_{ik} \times \left( \frac{\partial v_{ni}}{\partial x} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial x_i} \right) + \frac{q \nabla T}{T} \right\} dV. \quad (19.4)$$

В теории флуктуаций уравнения движения записываются обычно в следующей форме:

$$\dot{x}_\alpha = \gamma_{\alpha\beta} X_\beta + y_\alpha. \quad (19.5)$$

Соответствие между величинами, фигурирующими в уравнении (19.5) и в уравнениях гидродинамики, даются следующей таблицей

$\dot{x}_\alpha$	$\tau_{ik}$	$h$	$q$
$X_\alpha$	$-\frac{1}{2T} \left( \frac{\partial v_{ni}}{\partial x_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial x_i} \right) \Delta V$	$-\frac{1}{T} \operatorname{div} (j - \rho v_n) \Delta V$	$-\frac{\nabla T}{T^2} \Delta V$
$y_\alpha$	$T_{ik}$	$H$	$Q$

Пользуясь соотношением

$$y_\alpha(t_1) y_\beta(t_2) = k (\gamma_{\alpha\beta} + \gamma_{\beta\alpha}) \delta(t_1 - t_2), \quad (19.6)$$

получаем флуктуации сторонних членов в уравнениях

гидродинамики сверхтекучей жидкости

$$\overline{T_{ik}(r_1 t_1) T_{lm}(r_2 t_2)} = 2kT \left\{ \eta (\delta_{il} \delta_{km} + \delta_{im} \delta_{kl}) + \left( \zeta_2 - \frac{2}{3} \eta \right) \delta_{ik} \delta_{lm} \right\} \cdot \delta(r_1 - r_2) \delta(t_1 - t_2), \quad (19.7)$$

$$\overline{T_{ik}(r_1 t_1) H(r_2 t_2)} = 2kT \zeta_1 \delta_{ik} \delta(r_1 - r_2) \delta(t_1 - t_2), \quad (19.8)$$

$$\overline{H(r_1 t_1) H(r_2 t_2)} = 2kT \zeta_3 \delta(r_1 - r_2) \delta(t_1 - t_2), \quad (19.9)$$

$$\overline{Q_i(r_1 t_1) Q_k(r_2 t_2)} = 2kT^2 \kappa \delta(r_1 - r_2) \delta(t_1 - t_2). \quad (19.10)$$

Флуктуации гидродинамических величин могут быть найдены, если выразить эти величины при помощи гидродинамических уравнений через сторонние члены.

При употреблении спектральных компонент флуктуирующих величин, которые определяются следующим образом:

$$x_\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{i\omega t} dt, \quad \overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{x_\omega x_{\omega'}} d\omega d\omega', \quad (19.11)$$

необходимо в формулах (19.7)–(19.10) произвести замену  $\delta(t_1 - t_2)$  на  $\frac{1}{2\pi} \delta(\omega + \omega')$ .

## ГЛАВА VI РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКА В СВЕРХТЕКУЧЕЙ ЖИДКОСТИ

### § 20. Первый и второй звуки

В звуковой волне скорости  $v_n$  и  $v_s$  предполагаются малыми\*), а термодинамические величины почти равными равновесным значениям. Распространение звука в гелии II описывается системой гидродинамических уравнений (17.22)–(17.25), которая в данном случае может быть линеаризована. После линеаризации указанные уравнения приобретают вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} j = 0, \quad (20.1)$$

$$\frac{\partial (\rho s)}{\partial t} + \rho s \operatorname{div} v_n = 0 \quad (s\rho = S), \quad (20.2)$$

$$\frac{\partial j}{\partial t} + \nabla p = 0, \quad (20.3)$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} + \nabla \mu = 0. \quad (20.4)$$

Исключим из уравнений (20.1) и (20.3) импульс  $j$ , в результате получим

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \Delta p. \quad (20.5)$$

Далее из трех уравнений (20.2), (20.3) и (20.4) исключим скорости  $v_n$  и  $v_s$ . Для этого продифференцируем по

\*) Имеется в виду малость скоростей  $v_n$  и  $v_s$  по сравнению со скоростью звука.

времени уравнение (20.2), а к уравнениям (20.3) и (20.4) применим операцию  $\text{div}$ . Исключив из полученных таким образом уравнений члены  $\frac{\partial}{\partial t} \text{div } v_n$  и  $\frac{\partial}{\partial t} \text{div } v_s$ , получим

$$\rho_s \Delta \mu - \Delta p + \frac{\rho_n}{\rho_s} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho \sigma) = 0. \quad (20.6)$$

Выразим в этом уравнении производную  $\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}$  с помощью уравнения (20.5) и воспользуемся термодинамическим тождеством (17.26). В итоге находим

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = \frac{\rho_s}{\rho_n} \sigma^2 \Delta T. \quad (20.7)$$

Уравнения (20.5) и (20.7) определяют изменения термодинамических величин в звуковой волне.

Перейдем в указанных уравнениях к независимым переменным  $p$  и  $T$ , которые представим в виде  $p = p_0 + p'$ ,  $T = T_0 + T'$ . Величины с индексом нуль есть равновесные значения, а со штрихом — их изменения в звуковой волне. Уравнения (20.5) и (20.7) в результате приобретают вид

$$\frac{\partial p}{\partial p} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' + \frac{\partial p}{\partial T} \frac{\partial^2 T'}{\partial t^2} = 0, \quad (20.8)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial p} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\partial^2 T'}{\partial t^2} - \frac{\sigma^2 \rho_s}{\rho_n} \Delta T' = 0. \quad (20.9)$$

Ищем решение системы (20.8)–(20.9), представляющее бегущую в некотором направлении плоскую волну. В такой волне величины  $p'$  и  $T'$  изменяются по закону  $\exp[-i\omega(t - x/u)]$  (ось  $x$  выбираем в направлении распространения волны,  $\omega$  — частота,  $u$  — скорость звука). При таком законе изменения величин  $p'$  и  $T'$  система уравнений (20.8)–(20.9) переходит в

$$\left( \frac{\partial p}{\partial p} u^2 - 1 \right) p' + \frac{\partial p}{\partial T} u^2 T' = 0, \quad (20.10)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial p} u^2 p' + \left( \frac{\partial \sigma}{\partial T} u^2 - \frac{\sigma^2 \rho_s}{\rho_n} \right) T' = 0. \quad (20.11)$$

Условием совместности этих уравнений является равенство нулю их определителя. Раскрывая указанный определитель, получаем биквадратное уравнение

$$u^4 \frac{\partial(\sigma, p)}{\partial(T, p)} - u^2 \left( \frac{\partial \sigma}{\partial T} + \sigma^2 \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\partial p}{\partial p} \right) + \frac{\rho_s}{\rho_n} \sigma^2 = 0, \quad (20.12)$$

которое после несложных преобразований приобретает вид

$$u^4 - u^2 \left[ \left( \frac{\partial p}{\partial p} \right)_\sigma + \frac{\rho_s}{\rho_n} \sigma^2 \left( \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right)_p \right] + \frac{\rho_s}{\rho_n} \sigma^2 \left( \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right)_p \left( \frac{\partial p}{\partial p} \right)_T = 0. \quad (20.13)$$

Уравнение (20.13) определяет две возможные скорости звука в гелии II. Коэффициент теплового расширения  $\left( \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_p \right)$  практически оказывается у всех тел очень малым. У гелия II же величина этого коэффициента аномально мала. Поэтому согласно известным термодинамическим соотношениям теплоемкости  $C_p$  и  $C_v$  в гелии II практически можно считать равными. Но в таком случае производные  $\left( \frac{\partial p}{\partial p} \right)_T$  и  $\left( \frac{\partial p}{\partial p} \right)_\sigma$ , связанные соотношением  $\left( \frac{\partial p}{\partial p} \right)_\sigma = \frac{C_p}{C_v} \left( \frac{\partial p}{\partial p} \right)_T$ , с большой степенью точности также можно считать равными. Это обстоятельство значительно упрощает уравнение (20.13), его корни в этом случае равны

$$u_1 = c = \sqrt{\left( \frac{\partial p}{\partial p} \right)_\sigma}, \quad (20.14)$$

$$u_2 = \sqrt{\frac{\sigma^2 \rho_s}{\rho_n (\partial \sigma / \partial T)}}. \quad (20.15)$$

Первый корень определяет скорость обычного (первого) звука в гелии II. С такой скоростью согласно уравнению (20.5) распространяются в гелии II колебания давления (плотности). Второй корень  $u_2$  определяет скорость так называемого второго звука. Согласно уравнению (20.7) с такой скоростью в гелии II распространяются колебания температуры (энтропии). Возможность распространения незатухающих температурных волн является специфическим свойством гелия II. Температурная зависимость

скорости второго звука, вычисленная по формуле (20.15), графически изображена на рис. 4. В  $\lambda$ -точке  $\rho_s = 0$  и скорость  $u_2$  также обращается в нуль. При достаточно низких температурах (ниже  $0,5^\circ \text{K}$ ), когда все термодинамические величины определяются только фононами, величина скорости  $u_2$  стремится к пределу  $c/\sqrt{3}$ .

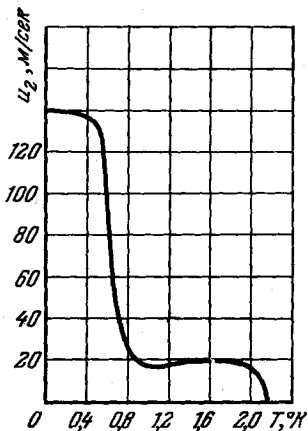


Рис. 4.

Остановимся подробнее на физической природе обоих видов звуковых волн. Рассмотрим плоскую звуковую волну, в которой все переменные величины пропорциональны  $\exp i\omega(t - x/u)$ . Обозначая штрихом переменные части соответствующих величин, получим из (20.1) — (20.4) систему алгебраических уравнений

$$\left. \begin{aligned} u\rho' - j = 0, \quad u_2\rho' + u\sigma' - \sigma v_n = 0, \\ u j - p' = 0, \quad u v_s + \sigma T' - \frac{1}{\rho} p' = 0. \end{aligned} \right\} \quad (20.16)$$

Перепишем эту систему в более удобном для анализа виде:

$$p' = u^2 \rho' = u j, \quad (20.17)$$

$$T' = \frac{u^2 \rho_n}{\sigma^2 \rho_s} \sigma' = \frac{u \rho_n}{\sigma \rho} (v_n - v_s). \quad (20.18)$$

\*) Так, например, в газе фотонов скорость звука равна  $c/\sqrt{3}$ , где  $c$  — скорость света.

Полученные уравнения устанавливают связь между колебаниями различных величин в звуковых волнах двух типов. Для каждого типа звуковых волн следует подставить соответствующее значение скорости звука  $u_1$  или  $u_2$  из (20.14) и (20.15). Волны первого звука представляют собой колебания плотности  $\rho$ , если пренебречь тепловым расширением; колебания температуры в них вообще отсутствуют. Согласно (20.18) в этом случае  $v_n = v_s$ . Другими словами, в волнах первого звука гелий движется как целое, т. е. нормальная и сверхтекучая части колеблются вместе. Волны первого звука, очевидно, аналогичны обычному звуку в обычных средах.

В волнах второго звука испытывают колебания температура и энтропия. Давление же и плотность в рассматриваемом приближении не колеблются. Тогда из (20.17) следует, что  $j = \rho_s v_s + \rho_n v_n = 0$ . В такого рода колебаниях нормальная и сверхтекучая части совершают движение навстречу друг другу так, что суммарный поток вещества отсутствует в каждый момент времени. Возможность существования незатухающих температурных волн есть специфическое свойство сверхтекучей жидкости, обязанное наличию двух движений. В обычных средах температурные волны затухают благодаря теплопроводности на расстояниях порядка длины волны ( $\sim \sqrt{\chi/\omega}$ , где  $\chi$  — температуропроводность), и таким образом, никакой периодичности в таких волнах нет.

При учете теплового расширения возникает зацепление между колебаниями первого и второго звуков, т. е. возникают колебания температуры в волнах первого звука и колебания давления в волнах второго звука. Формулы, связывающие соответствующие амплитуды колебаний, получаются с помощью соотношений (20.17), (20.18) [15]. Вводим коэффициенты пропорциональности между скоростями и переменными частями температуры и давления:

$$v_n = a v_s, \quad p' = b v_s, \quad T' = c v_s. \quad (20.19)$$

С точностью до членов первого порядка по коэффициенту теплового расширения  $\alpha$  получаем для первого звука

$$a_1 = 1 + \frac{\alpha \rho}{\rho_s \sigma} \frac{u_1^2}{u_1^2 - u_2^2}, \quad b_1 = \rho u_1, \quad c_1 = \rho \frac{\alpha T}{c} \frac{u_1^3}{u_1^2 - u_2^2} \quad (20.20)$$

и для волн второго звука

$$a_2 = -\frac{\rho_s}{\rho_n} + \frac{\alpha\rho}{\sigma\rho_n} \frac{u_1^2 u_2^2}{u_1^2 - u_2^2}, \quad b_2 = \frac{\alpha\rho u_1^2 u_2^2}{\sigma(u_1^2 - u_2^2)}, \quad c_2 = -\frac{u_2}{\sigma}. \quad (20.21)$$

### § 21. Излучение звука в сверхтекучей жидкости [15]

Различная физическая природа первого и второго звуков обуславливает различие в способах излучения их. Рассмотрим несколько примеров излучения звука. Начнем с излучения звуковых волн плоскостью, совершающей колебания в перпендикулярном себе направлении (которое выбираем в качестве оси  $x$ ). Запишем скорость  $v_s$  (по направлению оси  $x$ ) в первом и втором излучаемых звуках соответственно в виде

$$v_{s1} = A_1 e^{-i\omega(t-x/u)}, \quad v_{s2} = A_2 e^{-i\omega(t-x/u)}. \quad (21.1)$$

Из граничных условий (17.36) следует, что на поверхности твердого тела скорости  $v_{sx}$  и  $v_{nx}$  совпадают со скоростью поверхности  $v_0 e^{-i\omega t}$ . Таким образом, имеем

$$A_1 + A_2 = v_0, \quad A_1 a_1 + A_2 a_2 = v_0,$$

где  $a_1, a_2$  — коэффициенты в формуле (20.19). Отсюда находим

$$\frac{A_2}{A} = -\frac{1-a_1}{1-a_2} = \frac{\alpha\rho_n u_2^2}{\rho_s \sigma} = \frac{T\sigma\alpha}{C} \quad (21.2)$$

( $C$  — теплоемкость). При этом используем формулы (20.20) и (20.21), которые упрощаются при не слишком низких температурах, когда можно пренебречь  $u_2^2$  по сравнению с  $u_1^2$ .

Поскольку при колебательном движении средняя кинетическая энергия равна средней потенциальной, полная плотность энергии равна

$$E = \rho_s \bar{v}_s^2 + \rho_n \bar{v}_n^2 = \frac{1}{2} |A|^2 (\rho_s + \rho_n a^2). \quad (21.3)$$

Поток энергии (интенсивность) получается умножением этой плотности на соответствующую скорость звука. Для отношения интенсивностей излучаемых волн второго и первого звуков имеем

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{u_2 |A_2|^2 (\rho_s + \rho_n a_2^2)}{u_1 |A_1|^2 (\rho_s + \rho_n a_1^2)} \approx \frac{\alpha^2 T u_2^3 \rho}{C u_1} \quad (21.4)$$

$$(a_1 \approx 1, \quad a_2 \approx -\rho_s/\rho_n).$$

Выпишем также выражения для  $I_1$  и  $I_2$  через амплитуды колебаний давления  $p'_0$  и температуры  $T'_0$ :

$$I_1 = \frac{1}{2\rho u_1} p_0'^2, \quad I_2 = \frac{C u_2}{2T} T_0'^2. \quad (21.5)$$

Интенсивность излучения второго звука в рассмотренном случае оказывается ничтожно малой — пропорциональной квадрату коэффициента теплового расширения. Колеблущаяся указанным способом плоскость излучает в основном первый звук. Это легко понять, если обратить внимание на то, что на поверхности твердого тела  $v_s = v_n$ , а второй звук связан с наличием разности  $v_n - v_s$ .

Относительное движение компонент сверхтекучей и нормальной можно вызвать с помощью периодически изменяющего свою температуру тела, погруженного в гелий II. Рассмотрим, например, излучение звука от неподвижной твердой плоскости с периодически меняющейся температурой.

Граничные условия на поверхности состоят в этом случае в равенстве нулю перпендикулярной к плоскости компоненты потока вещества  $j$ , а также в пропорциональности разности температур твердого тела и жидкости плотности теплового потока. Для вычисления интенсивностей получаемого звука, однако, достаточно воспользоваться первым из этих условий, согласно которому имеем

$$\rho_s (A_1 + A_2) + \rho_n (a_1 A_1 + a_2 A_2) = 0,$$

откуда

$$\left| \frac{A_2}{A_1} \right| = \frac{\rho_n a_1 + \rho_s}{\rho_n a_2 + \rho_s} \approx \frac{\sigma}{\alpha u_2^2}.$$

Для отношения интенсивностей имеем

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{C}{\rho T \alpha^2 u_1 u_2}. \quad (21.6)$$

Это отношение очень велико (более  $10^3$ ), так что практически в данном случае излучается только второй звук.

## § 22. Отражение звука от границы между жидким гелием и его паром

Своеобразное явление обращения второго звука в первый и обратно имеет место при отражении звука от границы между жидким гелием и его паром. Действительно, распространяющаяся в гелии II волна второго звука, отражаясь от поверхности раздела жидкость — пар, создает на ней колебания температуры, приводящие к периодическому испарению и конденсации газа, в результате в паре вблизи поверхности возникают колебания плотности, распространяющиеся в глубь пара в виде обычных звуковых волн.

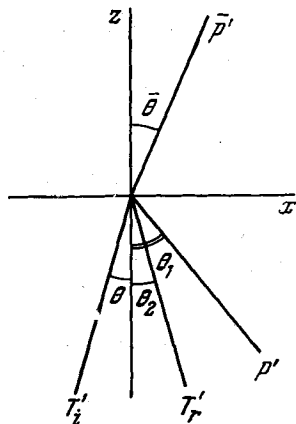


Рис. 5.

Рассмотрим случай падения волны второго звука  $T_i'$  на границу между гелием II и его паром (рис. 5). При этом возникают две отраженные волны в жидкости:  $T_r'$  (отраженная волна второго звука) и  $p'$  (волна первого

звука) и одна волна в паре  $\bar{p}'$  (адиабатическая волна). Мы предполагаем, что теплопроводностью пара можно пренебречь. Это всегда можно сделать для частот звука, удовлетворяющих условию  $\omega \ll \bar{c}^2/\bar{\chi}$  ( $\bar{c}$  — адиабатическая скорость звука,  $\bar{\chi}$  — температуропроводность пара). Однако в граничных условиях, несмотря на то, что температурная волна быстро затухает, следует, как это будет видно, учитывать температурную волну  $\bar{T}'$ .

В качестве граничной плоскости выбираем плоскость  $xu$ . Из однородности задачи в этой плоскости следует, что все волны будут иметь одинаковые компоненты  $k_x$ ,  $k_y$  волнового вектора. Отсюда непосредственно следуют соотношения, определяющие направления распространения возникающих волн. Пусть  $xz$  есть плоскость падения волны  $T_i'$ , а  $\theta$ ,  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  и  $\bar{\theta}$  — углы между направлениями распространения волн  $T_i'$ ,  $p'$ ,  $T_r'$ ,  $\bar{p}'$  и осью  $z$  соответственно. Тогда из равенства  $k_x$  и  $k_y$  следует, что все волны лежат в одной плоскости:

$$\sin \theta_1 = \frac{u_1}{u_2} \sin \theta, \quad \theta_2 = \theta, \quad \sin \bar{\theta} = \frac{\bar{c}}{u_2} \sin \theta, \quad (22.1)$$

$u_1$  и  $u_2$  — соответственно скорости первого и второго звуков в жидкости,  $\bar{c}$  — скорость звука в паре.

Введем величину  $\zeta(x, t) = \zeta^{(0)} e^{-i\omega t + ix \frac{\omega}{u_2} \sin \theta}$ , характеризующую колебания границы раздела. Выпишем теперь условия, которые должны выполняться на границе раздела жидкость — пар. Индексом 0 обозначаем амплитуды соответствующих величин, чертой — значение соответствующих величин в паре и без черты — в жидкости.

а) Равенство сил, действующих на границу,

$$p^{(0)} - \bar{p}^{(0)} = \gamma \frac{\omega^2}{u_2^2} \sin^2 \theta \zeta^{(0)}, \quad (22.2)$$

$\gamma$  — коэффициент поверхностного натяжения.

б) Равенство плотностей потоков вещества через границу

$$-\frac{\cos \theta_1}{u_1} p^{(0)} + i\omega \rho \zeta^{(0)} = \frac{\cos \bar{\theta}}{\bar{c}} \bar{p}^{(0)} + i\omega \bar{\rho} \bar{\zeta}^{(0)}. \quad (22.3)$$

в) Равенство плотностей потоков энергии

$$W \left( -\frac{\cos \theta_1}{u_1} p^{(0)} + i\omega \rho \zeta^{(0)} \right) + \rho \frac{p_s}{\rho_n} \frac{\sigma^2 T}{u_2} \cos \theta (T_i^{(0)} - T_r^{(0)}) = \\ = \bar{W} \left( \frac{\cos \bar{\theta}}{\bar{c}} \bar{p}^{(0)} + i\omega \bar{\rho} \bar{\zeta}^{(0)} \right), \quad (22.4)$$

$W$  — тепловая функция,  $\sigma$  — энтропия.

г) Равенство температур

$$T_i^{(0)} + T_r^{(0)} = \frac{T\alpha}{c_p} \bar{p}^{(0)} + \bar{T}^{(0)}, \quad (22.5)$$

$\alpha$  — коэффициент теплового расширения пара.

д) Равенство химических потенциалов

$$\frac{1}{\rho} p^{(0)} - \sigma (T_i^{(0)} + T_r^{(0)}) = \frac{1}{\bar{\rho}} \bar{p}^{(0)} - \sigma \left( \frac{\alpha T}{c_p} \bar{p}^{(0)} + \bar{T}^{(0)} \right). \quad (22.6)$$

В интересующем нас интервале частот можно пренебречь поверхностным натяжением  $\left( \frac{\gamma \omega}{\rho u_1 u_2^2} \ll 1 \right)$  в уравнении (22.2). Кроме того, учтем, что  $\sigma/\bar{\sigma} \ll 1$ ,  $\bar{\rho}/\rho \ll 1$ , после чего система (22.2)–(22.6) упрощается, и мы находим

$$\frac{\bar{p}^{(0)}}{T_i^{(0)}} = \frac{p^{(0)}}{T_i^{(0)}} = \frac{2\rho\sigma \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\sigma}{\rho} \frac{\bar{c}}{u_2} \cos \theta}{\cos \bar{\theta} + \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\rho}{\rho} \left( \frac{\sigma}{\bar{\sigma}} \right)^2 \frac{\bar{c}}{u_2} \cos \theta}, \quad (22.7)$$

$$\frac{T_r^{(0)}}{T_i^{(0)}} = \frac{-\cos \bar{\theta} + \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\rho}{\rho} \left( \frac{\sigma}{\bar{\sigma}} \right)^2 \frac{\bar{c}}{u_2} \cos \theta}{\cos \bar{\theta} + \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\rho}{\rho} \left( \frac{\sigma}{\bar{\sigma}} \right)^2 \frac{\bar{c}}{u_2} \cos \theta}. \quad (22.8)$$

Используя формулы (21.5) и (22.7)–(22.8), вычисляем коэффициент отражения второго звука  $R_2$ , коэффициент трансформации второго звука в первый  $R_1$  и в обычный звук в паре  $\bar{R}$ :

$$R_2 = \left( \frac{-\cos \bar{\theta} + \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\rho}{\rho} \left( \frac{\sigma}{\bar{\sigma}} \right)^2 \frac{\bar{c}}{u_2} \cos \theta}{\cos \bar{\theta} + \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\rho}{\rho} \left( \frac{\sigma}{\bar{\sigma}} \right)^2 \frac{\bar{c}}{u_2} \cos \theta} \right)^2, \quad (22.9)$$

$$R_1 = \frac{4 \frac{\rho_s}{\rho_n} \left( \frac{\sigma}{\bar{\sigma}} \right)^2 \frac{\bar{c}}{u_2} \frac{\bar{c}}{u_1} \cos \theta \cos \theta_1}{\left( \cos \bar{\theta} + \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\rho}{\rho} \left( \frac{\sigma}{\bar{\sigma}} \right)^2 \frac{\bar{c}}{u_2} \cos \theta \right)^2}, \quad (22.10)$$

и

$$\bar{R} = \frac{4 \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\rho}{\rho} \left( \frac{\sigma}{\bar{\sigma}} \right)^2 \frac{\bar{c}}{u_2} \cos \theta \cos \bar{\theta}}{\left( \cos \bar{\theta} + \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\rho}{\rho} \left( \frac{\sigma}{\bar{\sigma}} \right)^2 \frac{\bar{c}}{u_2} \cos \theta \right)}. \quad (22.11)$$

Из (22.10) видно, что при углах падения  $\theta > \arcsin(u_2/u_1)$  отсутствует отраженная волна первого звука в жидкости, а при углах  $\theta > \arcsin(u_2/\bar{c})$  отсутствует и прошедшая в пар звуковая волна. Таким образом, в этом последнем случае происходит полное внутреннее отражение второго звука. Полное внутреннее отражение может иметь место в области температур выше  $0,7^\circ \text{K}$ , в которой  $\bar{c} > u_2$ .

Следует обратить внимание на малость коэффициента  $R_1$ , определяющего трансформацию второго звука в первый в жидком гелии II.

## § 23. Поглощение звука [16]

Наличие диссипативных процессов в сверхтекучей жидкости приводит к поглощению звука. Для исследования вопроса о распространении звука при наличии диссипации запишем общие уравнения (18.13)–(18.16) в линеаризованном виде:

$$\dot{\rho} + \text{div } \mathbf{j} = 0, \quad (23.1)$$

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial r_i} = \eta \frac{\partial}{\partial r_k} \left( \frac{\partial v_{ni}}{\partial r_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial r_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_{nl}}{\partial r_l} \right) + \frac{\partial}{\partial r_i} \{ \zeta_1 \text{div } (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \zeta_2 \text{div } \mathbf{v}_n \}, \quad (23.2)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_s + \nabla \mu = \nabla \{ \zeta_3 \text{div } (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \zeta_4 \text{div } \mathbf{v}_n \}, \quad (23.3)$$

$$T \{ (\dot{\sigma}) + \sigma \rho \text{div } \mathbf{v}_n \} = \kappa \Delta T. \quad (23.4)$$

В звуковой волне скорости  $\mathbf{v}_n$  и  $\mathbf{v}_s$  и изменяющиеся части термодинамических величин  $\rho'$  и  $\sigma'$  (которые мы выбираем в качестве независимых переменных) меняются по закону  $\exp[-i\omega(t - x/u)]$  ( $x$  — направление распространения волны,  $\omega$  — частота звука). Скорость звука  $u$



в данном случае будет комплексной величиной, ее мнимая часть будет определять поглощение. Для упрощения вычислений воспользуемся малостью теплового расширения в гелии II. Тогда после исключения переменных  $v_n$  и  $v_s$  из уравнений (23.1)–(23.4) получаем два уравнения:

$$\left(u^2 - \frac{\partial p}{\partial \rho}\right) \rho' = i\omega \left\{ \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta_2\right) \frac{\rho'}{\rho} + \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta_2 - \rho\zeta_1\right) \frac{\sigma'}{\sigma} \right\}, \quad (23.5)$$

$$\left(\sigma \frac{\partial T}{\partial \sigma} - \frac{\rho_n}{\rho_s \sigma} u^2\right) \sigma' = i\omega \left\{ \left(\zeta_4 - \frac{1}{\rho} \zeta_2 - \frac{4}{3\rho} \eta\right) \frac{\rho'}{\rho} + \left(\zeta_4 - \rho\zeta_3 - \frac{1}{\rho} \zeta_2 + \zeta_1 - \frac{4}{3\rho} \eta\right) \frac{\sigma'}{\sigma} - \frac{\rho_n}{\rho_s} \frac{\kappa}{\rho \sigma T} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \sigma' \right\}. \quad (23.6)$$

Условие совместности системы (23.5), (23.6) записывается в виде равенства нулю ее определителя. Однако для небольших частот  $\omega$  можно ограничиться в уравнениях линейными по  $\omega$  членами. А это означает, как легко видеть, возможность пренебречь членами с  $\sigma'$  в уравнении (23.5) и членами с  $\rho'$  в уравнении (23.6). В результате получаем два независимых однородных уравнения, из которых следуют уравнения, определяющие скорости звука:

$$u^2 - \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_\sigma = \frac{i\omega}{\rho} \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta_2\right), \quad (23.7)$$

$$\left(\sigma \frac{\partial T}{\partial \sigma} - \frac{\rho_n}{\rho_s \sigma} u^2\right) = \frac{i\omega}{\rho \sigma} \left\{ \rho(\zeta_1 + \zeta_4) - \rho^2 \zeta_3 - \zeta_2 - \frac{4}{3}\eta - \frac{\rho_n}{\rho_s} \frac{\kappa}{T} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right\}. \quad (23.8)$$

Корень уравнения (23.7) определяет скорость первого звука с учетом затухания:

$$3u_1 k'. \quad u_1^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_\sigma + \frac{i\omega}{\rho} \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta_2\right). \quad (23.9)$$

Корень же уравнения (23.8) определяет скорость второго звука также с учетом затухания:

$$u_2^2 = \sigma^2 \frac{\partial T}{\partial \sigma} \frac{\rho_s}{\rho_n} + \frac{i\omega}{\rho} \frac{\rho_s}{\rho_n} \times \left\{ \zeta_2 + \rho^2 \zeta_3 - 2\rho\zeta_1 + \frac{4}{3}\eta + \frac{\rho_n}{\rho_s} \frac{\kappa}{T} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right\}. \quad (23.10)$$

Скорости  $u_1$  и  $u_2$  являются комплексными величинами. Поэтому комплексными величинами будут также и волновые векторы  $k = \omega/u$ . Действительная часть волнового вектора определяет изменение фазы колебаний с расстоянием, мнимая же часть есть просто коэффициент поглощения звука. Мнимая часть волнового вектора для первого звука согласно (23.9) равна

$$\alpha_1 = \text{Im} \frac{\omega}{u_1} = \frac{\omega^2}{2\rho u_1^3} \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta_2\right). \quad (23.11)$$

Таким образом, коэффициент поглощения первого звука  $\alpha_1$  зависит только от двух кинетических коэффициентов: коэффициента первой вязкости  $\eta$  и коэффициента второй вязкости  $\zeta_2$ . То обстоятельство, что другие коэффициенты ( $\zeta_1$ ,  $\zeta_3$  и  $\kappa$ ) не входят в выражение для  $\alpha_1$ , связано с пренебрежением эффектом теплового расширения гелия II. Так, учет теплопроводности дает дополнительное слагаемое в  $\alpha_1$  вида

$$\frac{\omega^2}{2u_1^3} \frac{\kappa}{C} \left(\frac{C_p}{C_v} - 1\right). \quad (23.12)$$

Заметим, что главную роль, как показывают вычисления коэффициентов  $\eta$  и  $\zeta_2$ , в поглощении первого звука играет вторая вязкость, связанная с коэффициентом  $\zeta_2$ .

Коэффициент поглощения второго звука равен мнимой части волнового вектора, вычисленной с помощью выражения (23.10):

$$\alpha_2 = \text{Im} \frac{\omega}{u_2} = \frac{\omega^2}{2\rho u_2^3} \frac{\rho_s}{\rho_n} \times \left\{ \frac{4}{3}\eta + (\zeta_2 + \rho^2 \zeta_3 - 2\rho\zeta_1) + \frac{\rho_n}{\rho_s} \frac{\kappa}{T} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right\}. \quad (23.13)$$

Подробный анализ показывает, что главную роль в поглощении второго звука играет теплопроводность, эффект которой описывается последним слагаемым в формуле (23.13).

### § 24. Четвертый звук [17]

В узких капиллярах возможна такая ситуация, когда длина свободного пробега возбуждений становится сравнимой и может превосходить диаметр трубки. В этом случае при течении гелия нормальная часть будет неподвижной. При этом по сверхтекучей части жидкости могут распространяться звуковые колебания, так называемый четвертый звук. Скорость четвертого звука находится из линеаризованной системы гидродинамических уравнений, в которых следует положить  $v_n = 0$ . Согласно (17.22) — (17.25) имеем

$$\dot{\rho} + \rho_s \operatorname{div} v_s = 0, \quad (24.1)$$

$$\dot{v}_s + \nabla \mu = 0, \quad (24.2)$$

$$\dot{S} = 0. \quad (24.3)$$

Исключив из первых двух уравнений скорость  $v_s$  и учитывая тождество (17.26) для  $\mu$ , получим

$$\ddot{\rho} = \frac{\rho_s}{\rho} \Delta p - \sigma \rho_s \Delta T. \quad (24.4)$$

Уравнение (24.3), если пренебречь коэффициентом теплового расширения  $\partial \rho / \partial t$ , дает

$$\rho \frac{\partial \sigma}{\partial T} \Delta T + \sigma \frac{\partial \rho}{\partial p} \Delta p = 0. \quad (24.5)$$

Из уравнений (24.4) и (24.5) следует волновое уравнение для  $p$ :

$$\ddot{p} - \left[ \frac{\rho_s}{\rho} \frac{\partial p}{\partial p} + \frac{\rho_s \sigma}{\rho (\partial \sigma / \partial T)} \right] \Delta p = 0, \quad (24.6)$$

имеющее периодические решения, распространяющиеся со скоростью

$$u_4^2 = \frac{\rho_s}{\rho} u_1^2 + \frac{\rho_n}{\rho} u_2^2, \quad (24.7)$$

где  $u_1 = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}$  — скорость первого звука, а  $u_2 = \sqrt{\frac{\rho_s \sigma^2}{\rho_n (\partial \sigma / \partial T)}}$  — скорость второго звука (см. 20.14), (20.15).

Таким образом, в узких капиллярах могут распространяться звуковые колебания по сверхтекучей компоненте со скоростью, определяемой формулой (24.7). Такого рода колебания названы Аткинсом четвертым звуком. Практически в формуле (24.7) при всех температурах второй член оказывается много меньше первого.

### § 25. Капиллярные волны

На свободной поверхности гелия II могут распространяться волны, затухающие в глубь жидкости. Это явление совершенно аналогично капиллярным волнам на поверхности классической жидкости. Выбираем ось  $z$  по нормали к поверхности, обозначаем через  $\xi$  отклонение координаты поверхности от равновесного положения. Если пренебречь эффектами, связанными с присутствием пара, то на поверхности жидкости должны выполняться следующие граничные условия.

а) Нормальный поток жидкости через поверхность должен равняться нулю:

$$\rho_s v_{sz} + \rho_n v_{nz} - \rho \dot{\xi} = 0. \quad (25.1)$$

б) Сумма сил давления и поверхностного натяжения должна равняться нулю (поверхность — плоскость  $xy$ ):

$$p - \gamma \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (25.2)$$

( $\gamma$  — коэффициент поверхностного натяжения).

в) Должен обращаться в нуль поток энтропии через поверхность, а следовательно,

$$v_{nz} - \dot{\xi} = 0. \quad (25.3)$$

Из (25.1) и (25.3) следует, что  $z$ -компоненты нормальной и сверхтекучей скоростей должны равняться скорости поверхности  $\dot{\xi}$ .

Рассмотрим периодическую волну, распространяющуюся по направлению оси  $x$  и затухающую в глубь жидкости. В ней все величины изменяются по закону  $\exp(-i\omega t + ikx - \kappa z)$ . Поскольку линеаризованные уравнения гидродинамики сводятся к волновым уравнениям, частота  $\omega$ , волновой вектор  $k$  и величина  $\kappa$  связаны

соотношением

$$\frac{\omega^2}{u^2} = k^2 - \kappa^2. \quad (25.4)$$

В пределе для малых частот имеем просто  $k = \kappa$ ;  $z$ -компонента уравнения движения дает связь, которая должна иметь место на поверхности:

$$-i\omega j_z = \kappa p' \quad (25.5)$$

(штрихом отмечаем переменные части всех величин). А из условия (25.2) имеем

$$p' + \gamma k^2 \xi = 0. \quad (25.6)$$

Поскольку  $j_z = \rho \dot{\xi}$ , из (25.5) и (25.6) окончательно получаем

$$\omega^2 = \frac{\gamma}{\rho} k^3. \quad (25.7)$$

Таким образом, капиллярные волны в сверхтекучей жидкости имеют такой же закон дисперсии, как и в классическом случае.

Ситуация изменяется в том случае, когда мы рассматриваем волны, бегущие вдоль пленки гелия II. В этом случае, если толщина пленки невелика, нормальная часть в колебательном движении не участвует и граничные условия изменяются.

Вместо условия (25.1) имеем

$$\rho_s v_{sz} - \rho \dot{\xi} = 0. \quad (25.8)$$

Уравнение движения сверхтекучей части дает связь

$$i\omega v_{sz} + \kappa \mu' = 0. \quad (25.9)$$

Из (25.8), (25.9) и (25.6) получаем другое дисперсионное уравнение:

$$\omega^2 = \frac{\rho_s}{\rho} \frac{\gamma}{\rho} k^3. \quad (25.10)$$

Уравнение (25.10) имеет место, очевидно, в том случае, когда длина волны много меньше толщины пленки  $h$  ( $kh \gg 1$ ). В общем случае аналогичные вычисления дают уравнение

$$\omega^2 = \frac{\rho_s}{\rho} \frac{\gamma}{\rho} k^3 \operatorname{th} kh, \quad (25.11)$$

## ГЛАВА VII

### РАЗРЫВЫ В СВЕРХТЕКУЧЕЙ ЖИДКОСТИ [18]

#### § 26. Условия на поверхности разрывов

Распространение звуковых волн большой амплитуды, как известно из гидродинамики, приводит к возникновению разрывов — ударных волн. Сущность этого явления заключается в следующем. Точки профиля волны перемещаются с различными скоростями, а это приводит к изменению его формы со временем: точки с большими значениями скорости выдвигаются вперед (в обычной гидродинамике на гребне волны), обгоняя точки с меньшими скоростями. В конце концов профиль звукового импульса может настолько выгнуться, что станет неоднозначной функцией координаты. Физически такое положение невозможно. В действительности в волне возникает разрыв, отсекающий часть искаженного профиля. В результате все величины в волне оказываются всегда однозначными функциями координаты. Возникающие из звуковой волны ударные волны обладают, естественно, малой интенсивностью.

Аналогичные явления должны иметь место в волнах первого и второго звуков в гелии II. Разрывы в волне первого звука должны, естественно, полностью соответствовать обычным ударным волнам — на них испытывают скачки в основном лишь давление, плотность и скорости  $v_n = v_s$ ; скачок же энтропии, а с ним (при пренебрежении тепловым расширением) и скачки температуры и относительной скорости  $w$  являются малыми величинами третьего порядка.

Разрывы же в волне второго звука являются специфическим для сверхтекучей жидкости явлением, представляющим собой в основном разрыв температуры. Вместе

с температурой испытывает скачок и относительная скорость  $w$ , разрывы же остальных величин являются малыми высшего порядка.

Выясним условия, которые должны выполняться на поверхности разрыва в гелии II. Для этого вводим систему координат, движущуюся вместе с разрывом (со скоростью  $u$  относительно неподвижной системы). Ось  $x$  выберем по направлению нормали к поверхности разрыва, скорости жидкости предполагаем направленными вдоль этой же оси \*).

На поверхности разрыва должны быть непрерывны следующие величины:

а) Плотность потока массы жидкости

$$[j] = [\rho_s v_s + \rho_n v_n] = 0 \quad (26.1)$$

(здесь и ниже квадратные скобки обозначают разность значений соответствующей величины по обеим сторонам разрыва).

б) Плотность потока импульса

$$[P_{xx}] = [\rho_s v_s^2 + \rho_n v_n^2 + p] = 0. \quad (26.2)$$

в) Величина, стоящая под знаком градиента в уравнении сверхтекучего движения (17.25), т. е. сила, действующая на единицу массы сверхтекучей части жидкости,

$$\left[ \tilde{\mu} + \frac{v_s^2}{2} \right] = 0 \quad (26.3)$$

(знаком  $\sim$  над буквой отмечаем соответствующие термодинамические величины как функции  $p$ ,  $T$  и  $w$ ).

г) Плотность потока энергии; согласно (17.20) это условие гласит:

$$\left[ j \left( \tilde{\mu} + \frac{v_s^2}{2} \right) + T \tilde{\rho} \tilde{\nu}_n + \rho_n v_n^2 w \right] = 0,$$

а так как первый член непрерывен в силу условий (26.1) и (26.3), то достаточно потребовать

$$[T \tilde{\rho} \tilde{\nu}_n + \rho_n v_n^2 w] = 0. \quad (26.4)$$

\*) Мы не рассматриваем здесь тангенциальных разрывов, на которых могут испытывать скачок касательные к поверхности компоненты скорости.

Возвратимся теперь к неподвижной системе координат. Для упрощения дальнейших вычислений будем считать, что по одну сторону от разрыва имеется невозмущенная жидкость; другими словами, здесь  $v_n = v_s = 0$ , и все величины равны своим равновесным значениям. Скорость разрыва  $u$  будем считать положительной, если разрыв движется в сторону невозмущенной жидкости. Тогда в условиях (26.1)–(26.4) скорости  $v_s$  и  $v_n$  в движущейся вместе с разрывом системе координат надо положить равными  $u$  на невозмущенной стороне, а по другую сторону от разрыва заменить на  $v_s - u$  и  $v_n - u$ , где теперь  $v_s$  и  $v_n$  будут относиться к неподвижной системе отсчета. Для дальнейшего удобно ввести, наряду с разностью  $w = v_n - v_s$ , скорость  $v$ , формально связанную с плотностью потока соотношением  $j = \tilde{\rho} v$ . В результате условия (26.1)–(26.4) принимают вид:

$$\rho_0 u = \tilde{\rho} (u - v), \quad (26.5)$$

$$p_0 + \rho_0 u^2 = p + \tilde{\rho} (u - v)^2 + \frac{\rho_s \rho_n}{\tilde{\rho}} w^2, \quad (26.6)$$

$$\mu_0 + \frac{u^2}{2} = \tilde{\mu} + \frac{1}{2} \left( u - v + \frac{\rho_n}{\tilde{\rho}} w \right)^2, \quad (26.7)$$

$$\rho_0 T_0 \rho_0 u = \tilde{\rho} \tilde{\nu} T \left( u - v - \frac{\rho_s}{\tilde{\rho}} w \right) + \rho_n w \left( u - v - \frac{\rho_s}{\tilde{\rho}} w \right)^2 \quad (26.8)$$

(индексом нуль отмечаем равновесные значения величин, буквы без индекса обозначают значения величин по другую сторону разрыва).

## § 27. Разрывы небольшой интенсивности

Полученная система позволяет в принципе найти скорость ударных волн и скачок величин на разрывах. Однако ввиду сложной зависимости термодинамических величин от относительной скорости  $w$  общее исследование было бы чрезвычайно громоздким. Мы ограничимся рассмотрением разрывов небольшой интенсивности, когда можно ограничиться квадратичными по  $w$  членами в разложении термодинамических величин  $\tilde{\mu}$ ,  $\tilde{\nu}$  и  $\tilde{\rho}$ .

Исключим с помощью уравнения (26.5) величину  $u$  —  $v$  из остальных равенств и подставим в них для  $\mu$ ,  $\sigma$ , и  $\rho$  выражения (17.26), (17.28) и (17.29). Таким путем получаем систему

$$p - p_0 - \frac{p_0}{\rho} u^2 (\rho - \rho_0) + w^2 \rho_0 \left[ \frac{p_s p_n}{\rho^2} - \frac{p_0 u^2}{2} \frac{\partial}{\partial p} \frac{p_n}{\rho} \right] = 0, \quad (27.1)$$

$$\mu - \mu_0 - \frac{u^2}{2\rho^2} (\rho^2 - \rho_0^2) + \frac{p_0 p_n}{\rho^2} w u - w^2 \left[ \frac{p_s p_n}{2\rho^2} + \frac{p_0 u^2}{2} \frac{\partial}{\partial p} \frac{p_n}{\rho} \right] = 0, \quad (27.2)$$

$$\rho_0 u (T\sigma - T_0\sigma_0) - w \left( \sigma T \rho_s + \frac{p_n p_0^2}{\rho^2} u^2 \right) + \rho_0 w^2 u \left[ \frac{2p_n p_s}{\rho^2} + \frac{1}{2} T \frac{\partial}{\partial T} \frac{p_n}{\rho} \right] = 0. \quad (27.3)$$

Для дальнейшего анализа выбираем в качестве независимых переменных давление  $p$  и температуру  $T$  и разлагаем все величины в ряд по степеням  $\Delta p = p - p_0$  и  $\Delta T = T - T_0$ , ограничиваясь членами не выше второго порядка. Кроме того, пренебрегаем, как это мы делали до сих пор, зависимостью плотности  $\rho$  от температуры. После указанного разложения система (27.1)–(27.3) приобретает вид

$$\Delta p \left( 1 - u^2 \frac{\partial \rho}{\partial p} \right) + (\Delta p)^2 u^2 \left[ \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial p^2} \right] + w^2 \left[ \frac{p_s p_n}{\rho} - \frac{1}{2} \rho^2 u^2 \frac{\partial}{\partial p} \frac{p_n}{\rho} \right] = 0, \quad (27.4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\rho} \Delta p \left( 1 - u^2 \frac{\partial \rho}{\partial p} \right) - \sigma \Delta T + \frac{p_n}{\rho} u w + \\ & + (\Delta p)^2 \left[ -\frac{1}{2\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial p} + \frac{3}{2\rho^2} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)^2 u^2 - \frac{1}{2\rho} u^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial p^2} \right] + \\ & + \Delta p w \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial p_n}{\partial p} - 2 \frac{p_n}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \right] + w^2 \left[ -\frac{p_n p_s}{2\rho^2} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \rho u^2 \frac{\partial}{\partial p} \frac{p_n}{\rho} \right] - \frac{1}{2} (\Delta T)^2 \frac{\partial \sigma}{\partial T} + \Delta T w u \frac{\partial}{\partial T} \frac{p_n}{\rho} = 0, \quad (27.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \Delta T \rho u \left( \sigma + T \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) - w (\sigma T \rho_s + \rho_n u^2) + (\Delta T)^2 \rho u \times \\ & \times \left[ \frac{\partial \sigma}{\partial T} + \frac{1}{2} T \frac{\partial^2 \sigma}{\partial T^2} \right] - w \Delta T \left[ u^2 \frac{\partial \rho_n}{\partial T} + \sigma \rho_s + T \frac{\partial}{\partial T} (\sigma \rho_s) \right] - \\ & - w \Delta p \left[ -\frac{p_n}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} u^2 + \frac{\partial \rho_n}{\partial p} u^2 + T \sigma \frac{\partial \rho_s}{\partial p} \right] + \\ & + w^2 u \left( T \frac{\partial \rho_n}{\partial T} + \frac{2\rho_s p_n}{\rho} \right) = 0. \quad (27.6) \end{aligned}$$

В линейном приближении полученная система уравнений значительно упрощается. Приравняв нулю определитель этой системы (условие ее совместности), находим уравнение

$$\left( 1 - u^2 \frac{\partial \rho}{\partial p} \right) \left( \frac{\partial \sigma}{\partial T} u^2 \rho_n - \sigma^2 \rho_s \right) = 0, \quad (27.7)$$

выражающее в первом приближении значение скорости  $u$ . Корни уравнения (27.7) равны

$$u_{10}^2 = \frac{\partial \rho}{\partial p}, \quad (27.8)$$

$$u_{20}^2 = \frac{p_s}{p_n} \sigma^2 \frac{\partial T}{\partial \sigma}. \quad (27.9)$$

Полученный результат совершенно очевиден: слабые разрывы давления или температуры распространяются со скоростью соответствующего звука.

Система уравнений (27.4)–(27.6) после подстановки полученных значений скорости  $u$  позволяет выяснить связь скачков  $\Delta p$ ,  $\Delta T$  и  $w$  на разрыве. Таким путем убеждаемся в том, что первому корню соответствуют скачки  $\Delta T$  и  $w$  более высокого порядка по  $\Delta p$ , чем первый. Второму же корню соответствуют скачки  $\Delta p$  порядка выше первого относительно  $\Delta T$  и  $w$ . Кроме того, в этом случае имеет место следующая связь между  $\Delta T$  и  $w$ :

$$\Delta T = w u_2 \frac{p_n}{\rho \sigma}. \quad (27.10)$$

Первому корню соответствует разрыв давления, аналогичный ударным волнам в обычных средах. Второму же корню соответствует разрыв температуры (температурный разрыв).

### § 28. Разрывы давления (ударные волны)

Пренебрежем в уравнении (27.3) членами выше второго порядка; в результате получим уравнение

$$\left(1 - u^2 \frac{\partial \rho}{\partial p}\right) + \left(\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial p^2}\right) u^2 \Delta p = 0, \quad (28.1)$$

определяющее значение скорости разрыва давления во втором приближении

$$u_1 = u_{10} \left\{ 1 + \Delta p \frac{\partial}{\partial p} \ln(\rho u_{10}) \right\}. \quad (28.2)$$

При небольших значениях скачка скорости на поверхности разрыва согласно (26.1) имеем  $\Delta p = \rho u_{10} v$ . Учитывая это соотношение, перепишем формулу (28.2) в виде

$$u_1 = u_{10} \left\{ 1 + \frac{1}{2} v \frac{\partial}{\partial p} (\rho u_{10}) \right\}. \quad (28.3)$$

Решение (28.3) совпадает с выражением для скорости разрывов в обычных средах. Подставив полученное значение  $u^2$  в остальные два уравнения, убеждаемся в том, что в этом случае скачки  $\Delta T$  и  $w$  оказываются выше второго порядка относительно скачка давления  $\Delta p$ .

Таким образом, разрывы давления в гелии II полностью аналогичны ударным волнам в обычной гидродинамике. Знак выражения  $\frac{\partial}{\partial p} \ln(\rho u_{10})$  в гелии II так же положителен, как и в обычных средах. Следовательно, ударные волны этого типа могут быть только волнами сжатия. Первый член (28.2) равен скорости первого звука в гелии II; в первом приближении разрыв давления распространяется со скоростью, равной скорости первого звука.

### § 29. Температурные разрывы

Второму корню  $u_{20}$  соответствуют отличные от нуля в первом приближении скачки  $\Delta T$  и  $w$ . Пренебрежем в уравнениях (27.4)–(27.6) членами более высокого порядка, чем второй. Уравнение (27.4) позволяет выразить скачок давления  $\Delta p$  через значения скорости  $w$ ; указанный

скачок оказывается второго порядка малости относительно  $w$  (или  $\Delta T$ ):

$$\Delta p = -w^2 \left[ \frac{\rho_s \rho_n}{\rho} - \frac{1}{2} \rho^2 u_{20}^2 \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{\rho_n}{\rho} \right) \right]. \quad (29.1)$$

Подставим полученное значение  $\Delta p$  в уравнение (27.5) и исключим из уравнения (27.4) и (27.6) скорость  $w$ . В результате находим уравнение

$$\rho \left( -\sigma^2 \rho_s + u^2 \frac{\partial \sigma}{\partial T} \rho_n \right) + \rho_s \sigma T (\Delta T)^2 \times \\ \times \left\{ -3 \frac{\partial \sigma}{\partial T} + \frac{3}{2} \sigma \frac{\rho}{\rho_n \rho_s} \frac{\partial \rho_n}{\partial T} - \frac{1}{2} \sigma \frac{\partial T}{\partial \sigma} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial T^2} \right\} = 0, \quad (29.2)$$

определяющее величину скорости  $u_2$  во втором приближении. Разрешив уравнение (29.2) относительно  $u$  и учтя определение (27.9), получим

$$u_2 = u_{20} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial T} \ln \left( u_{20}^3 \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) \Delta T \right\}. \quad (29.3)$$

Полученную формулу можно записать в виде

$$u_2 = u_{20} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{\rho_n u_{20}^2}{\rho \sigma} w \frac{\partial}{\partial T} \ln \left( u_{20}^3 \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) \right\}. \quad (29.4)$$

Температурные разрывы — специфическое явление, характерное только для сверхтекучей жидкости. Формула (29.4) определяет скорость температурных разрывов в гелии. В первом приближении температурные разрывы движутся со скоростью, равной скорости второго звука  $u_{20}$ . Знак производной  $\frac{\partial}{\partial T} \ln \left( u_{20}^3 \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)$  меняется в зависимости от температуры; это обстоятельство приводит к своеобразным явлениям.

Точки профиля волны второго звука движутся с различными скоростями. Это приводит к изменению формы профиля волны со временем. В тот момент, когда форма профиля становится неоднозначной функцией координаты, возникают разрывы (в данном случае температурные). Скорости точек профиля волны на поверхности разрыва изменяются скачком. Скорость поверхности возникающего разрыва при этом зависит от указанного скачка скорости.

Согласно формуле (29.4) она равна \*)

$$u_2 = u_{20} + \frac{1}{2}(w_1 + w_2) \frac{\rho_s \sigma}{\rho} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \frac{\partial}{\partial T} \ln \left( u_{20}^3 \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right) \quad (29.5)$$

( $w_1$  и  $w_2$  — значения относительной скорости с обеих сторон поверхности разрыва).

Во втором звуке скорость  $w$  связана со скоростью нормального движения соотношением  $w = v_n \frac{\rho}{\rho_s}$ . Выражая

величину  $w$  через  $v_n$ , перепишем (29.5) в виде

$$u_2 = u_{20} + \frac{1}{2} \alpha_2 (v_{n1} + v_{n2}), \quad (29.6)$$

где

$$\alpha_2 = \frac{\sigma T}{C} \cdot \frac{\partial}{\partial T} \ln \left( u_{20}^3 \frac{C}{T} \right). \quad (29.6)$$

Коэффициент  $\alpha_2$  меняет знак при изменении температуры. Зависимость его от температуры изображена графически на рис. 6. При температурах выше  $2,00^\circ \text{K}$  и в интервале  $0,4-0,9^\circ \text{K}$  коэффициент  $\alpha_2 < 0$ , в остальной области  $\alpha_2 > 0$ . В области температур, где  $\alpha_2 < 0$ , поверхности разрыва возникают на заднем фронте волны, в области же температур, где  $\alpha_2 > 0$ , наоборот, на переднем

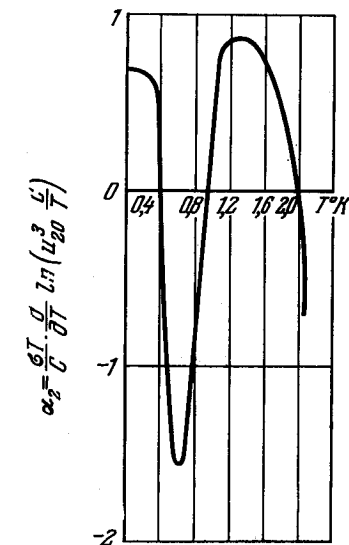


Рис. 6.

фронте волны. Возникновение разрыва на заднем фронте волны является специфическим свойством второго звука в гелии II, неизвестным для обычного звука.

\*) При выводе формулы (29.4) скорость  $w$  с одной стороны разрыва считалась равной нулю. В общем случае получается указанный в тексте результат.

## ГЛАВА VIII

### ГИДРОДИНАМИКА ВРАЩАЮЩЕЙСЯ СВЕРХТЕКУЧЕЙ ЖИДКОСТИ

#### § 30. Квантованные вихри [19, 20]

В основе рассмотренной в § 17 гидродинамики сверхтекучей жидкости лежало экспериментально подтвержденное предположение о безвихревом характере сверхтекучего движения. Из этого немедленно следует, что при вращении сверхтекучего гелия, скажем, в цилиндрическом сосуде, во вращение должна увлекаться только нормальная часть жидкости. Сверхтекучая же часть жидкости при этом должна оставаться неподвижной. Это также непосредственно следует из простой микроскопической картины. Действительно, при вращении сосуда возбуждения, сталкиваясь со стенкой, увлекаются вращением, так что нормальная часть жидкости движется вместе с сосудом. Сверхтекучая же часть со стенками не взаимодействует и стоит неподвижно. Однако это следствие не подтверждается экспериментом. Если бы описанная картина была верна, то глубина мениска жидкости во вращающемся сосуде была бы в  $\rho_n/\rho$  раз меньше глубины мениска, образованного классической вращающейся жидкостью. Эксперимент же этого не подтверждает. Вращающаяся сверхтекучая жидкость образует мениск, имеющий такую же глубину, как и классическая жидкость, т. е. опыт устанавливает, что при вращении сосуда со сверхтекучей жидкостью вращением увлекается вся жидкость.

Для того чтобы понять указанную ситуацию, вернемся снова к условию потенциальности сверхтекучего движения.

Потенциальность сверхтекучего движения выражается условием  $\text{rot } \mathbf{v}_s = 0$ . Это же условие по теореме Стокса может быть записано в виде равенства нулю циркуляции сверхтекучей скорости  $\mathbf{v}_s$  вдоль произвольного контура  $L$ :

$$\oint_L \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (30.1)$$

Умножим соотношение (30.1) на  $m$  — массу атома гелия. Таким образом, мы получим слева величину, которая в квантовой механике подлежит квантованию. Представляется поэтому естественным рассматривать условие (30.1) как частный случай более общего квантового условия

$$m \oint \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{l} = 2\pi n \hbar \quad (n — \text{целое число}). \quad (30.2)$$

Можно попытаться получить квантовую теорему о циркуляции (30.2) для бозе-жидкости, исходя из общих принципов.

Рассмотрим жидкость при абсолютном нуле в основном состоянии. Волновая функция  $\Phi_0$  в этом состоянии является симметричной функцией координат без узлов. Функция  $\Phi_0$  может быть выбрана действительной и в дальнейшем может полагаться равной положительному числу. Пусть система как целое движется равномерно со скоростью  $\mathbf{v}_s$ . При этом волновая функция приобретает

фазу  $\frac{i}{\hbar} N m \mathbf{v}_s \cdot \sum_i \mathbf{r}_i$  и будет равна (суммирование ведется по всем  $N$  частицам системы)

$$\Phi = \Phi_0 \exp\left(\frac{i}{\hbar} m \mathbf{v}_s \cdot \sum_i \mathbf{r}_i\right). \quad (30.3)$$

Предположение об отсутствии узлов позволяет заключить, что волновая функция непрерывно зависит от фазы. Формула (30.3) является точной для равномерного движения. В общем случае, когда скорость  $\mathbf{v}_s$  меняется от точки к точке, можно ввести в рассмотрение величину изменения фазы  $\Delta\varphi$  при небольшом смещении координат

нат частиц  $\Delta\mathbf{r}_i$ :

$$\Delta\varphi = \frac{i}{\hbar} m \sum_i \mathbf{v}_s \cdot \Delta\mathbf{r}_i. \quad (30.4)$$

Выберем в системе некоторое число частиц, образующих замкнутый контур. Сдвиг частиц вдоль контура не меняет состояния системы, поэтому фаза может при этом измениться лишь на целое число  $2\pi$ . Таким образом, совершая предельный переход, получаем

$$\frac{m}{\hbar} \sum \mathbf{v}_s \cdot \Delta\mathbf{r}_i \rightarrow \frac{m}{\hbar} \oint \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{l} = 2\pi n, \quad (30.5)$$

т. е. как раз искомое квантовое обобщение циркуляционной теоремы. При отличной от нуля температуре каждое из имеющихся в этом случае возбуждений с импульсом  $\mathbf{p}$  внесет в волновую функцию дополнительный множитель

$$\sum_i \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_i\right). \quad (30.6)$$

Однако при этом фаза, обязанная движению системы со скоростью  $\mathbf{v}_s$ , останется неизменной. Если в (30.5) выбрать контур  $L$  так, чтобы он не проходил вблизи возбуждений, то весь предыдущий вывод от этого не изменится.

Из формулы (30.2) следует, что в сверхтекучей жидкости возможны две различные ситуации, в зависимости от того, равно ли  $n$  нулю или не равно. При  $n = 0$  имеем  $\text{rot } \mathbf{v}_s = 0$ , и для случая вращения в односвязной области отсюда следует  $\mathbf{v}_s = 0$ . При  $n \neq 0$  ситуация сложнее. Циркуляция вокруг некоторых особых линий в этом случае не равна нулю. На этих линиях, являющихся аналогом вихревых нитей, известных в обычной гидродинамике, имеем особенность в  $\mathbf{v}_s$ . Естественно, что вблизи вихревых нитей приведенные выше рассуждения уже непригодны. Однако если не интересоваться детальной структурой ствола вихря, то единственное ограничение возникает лишь на форму контура  $L$ , который не должен проходить слишком близко от ствола вихря.

Рассмотрим движение сверхтекучей жидкости во вращающемся цилиндрическом сосуде. Поле скоростей



единичного вихря с осью, параллельной [оси вращения, согласно (30.2) определяется формулой

$$v_s = \frac{\kappa}{2\pi} \frac{1}{r}, \quad \kappa = \frac{2\pi\hbar}{m} n. \quad (30.7)$$

Его кинетическая энергия, приходящаяся на единицу длины, равна

$$E_k = \frac{1}{2} \rho_s \int_a^b v_s^2 2\pi r dr = \rho_s \frac{\kappa^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a}, \quad (30.8)$$

где  $a$  — радиус ствола вихря, имеющий размер порядка межатомного расстояния, а  $b$  — некоторый условный внешний радиус вихря. Радиус вихря  $b$  связан с числом вихрей, приходящихся на единицу площади  $N$ , очевидным соотношением

$$\pi b^2 = \frac{1}{N}.$$

Наконец, еще свяжем плотность вихрей  $N$  с величиной  $\text{rot } v_s$ . Согласно (30.2), используя теорему Стокса, имеем

$$N = \frac{|\text{rot } v_s|}{\kappa}. \quad (30.9)$$

### § 31. Анализ движения вращающейся сверхтекучей жидкости [21]

Для выяснения общей картины вращения сверхтекучей жидкости воспользуемся вариационным методом. Стационарному состоянию соответствует минимум величины  $F - M\omega_0$ , где  $F$  — свободная энергия,  $M$  — момент импульса жидкости,  $\omega_0$  — угловая скорость вращения сосуда. Свободная энергия движущейся жидкости складывается из свободной энергии покоящейся жидкости  $F_0$  и кинетической энергии  $\rho_s \frac{v_s^2}{2} + \rho_n \frac{v_n^2}{2}$  \*). Ввиду адди-

\*) Строго говоря, такое разделение является приближенным вследствие того, что термодинамические переменные зависят от относительной скорости  $v_n - v_s$ . В пределах интересующей нас точности это обстоятельство в данном вопросе, однако, не является существенным.

тивности кинетической энергии и момента  $M$  можно движение сверхтекучей жидкости рассматривать независимо от нормальной и минимизировать величину  $E_s - M_s\omega_0$ , где  $E_s$  и  $M_s$  относятся к сверхтекучей части. Нормальная часть жидкости, как легко видеть, будет совершать при этом вращательное движение по типу твердого тела, т. е. со скоростью  $v_n = \omega_0 r$ . Энергия  $E$  сверхтекучего движения (далее индекс  $s$  для простоты опускаем) равна

$$E = \frac{1}{2} \rho_s \int v^2 2\pi r dr + \rho_s \frac{\kappa}{4\pi} \int |\text{rot } v| \ln \left( \frac{\kappa^{1/2}}{\pi^{1/2} |\text{rot } v|^{1/2} a} \right) 2\pi r dr. \quad (31.1)$$

Второй член в формуле есть энергия вихрей, вычисленная с помощью формул (30.7), (30.8) и (30.9). Аналогично вычисляется момент жидкости:

$$M = \rho_s \int v r 2\pi r dr + \rho_s \frac{\kappa}{2\pi} \int 2\pi r dr. \quad (31.2)$$

Здесь второй член, так же как и в (31.1), обязан вкладу вихрей. Поскольку вычисления вклада вихрей имеют логарифмическую точность, то, строго говоря, включение этого члена является в известном смысле превышением точности, и его можно было бы опустить. Варьируем разность  $E - M\omega_0$  по  $\delta v$ , получаем \*)

$$\int \delta v \left\{ (v - \omega_0 r) + \frac{\kappa}{8\pi} \frac{\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (vr)}{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (vr)} \right\} 2\pi r dr + \frac{\kappa}{4\pi} \int \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \delta v \ln \frac{\kappa^{1/2}}{(\pi e |\text{rot } v|)^{1/2} a} \right\} 2\pi dr. \quad (31.3)$$

Из требования обращения первого интеграла в нуль следует уравнение

$$(v - \omega_0 r) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (vr) + \frac{\kappa}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (vr) = 0. \quad (31.4)$$

\*) Напоминаем, что в цилиндрических координатах

$$|\text{rot } v| = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (vr).$$

Обращение второго интеграла (31.3) в нуль происходит автоматически, если  $\delta v$  равно нулю на границах интегрирования.

Полученное уравнение (31.4) определяет поле сверхтекучей скорости во вращающемся цилиндрическом сосуде.

Уравнение (31.4) имеет два точных решения:

$$v = \omega_0 r, \quad (31.5)$$

$$v = \frac{k}{r}. \quad (31.6)$$

Первое решение соответствует твердотельному вращению, а второе ирротационному с ротором скорости, равным нулю. Заметим, что сумма решений (31.5) и (31.6) не удовлетворяет уравнению (31.4). Предположим, что вращение твердотельного типа захватывает область внутри некоторого радиуса  $R_i$ . Во внешней же области имеет место ирротационное решение с полем (31.6). Минимизируя затем свободную энергию по  $R_i$ , мы найдем величину  $R_i$ , которая, как мы увидим, оказывается меньше радиуса сосуда  $R$ . Таким образом, расчет подтверждает сделанное предположение. Константа  $k$  определяется из граничного условия  $v(R) = \omega_0 R^*$ . Получающееся при использовании граничного условия решение, однако, не сплывается при  $r = R_i$  с решением (31.5). Согласно уравнению (31.4) непрерывными должны быть величины  $vr$  и  $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (vr)$ . Следовательно, при  $r$ , близких к  $R_i$ , решения (31.5) и (31.6), вообще говоря, должны быть подправлены. Легко видеть, что в уравнении (31.4) имеется единственный параметр размерности длины  $\sqrt{\frac{\kappa}{\omega_0}}$ . Истинное решение будет отличаться от принятого нами лишь в узкой области вблизи  $R_i$  порядка  $\sqrt{\frac{\kappa}{\omega_0}}$  \*\*). Область же ирротационного движения, как мы сейчас увидим, имеет размер

\*) Граничное условие для  $v$  необходимо поставить, так как при варьировании свободной энергии предполагалось, что на границах  $\delta v = 0$ .

\*\*) Это обстоятельство подтверждается более подробным расчетом.

порядка  $\sqrt{\frac{\kappa}{\omega_0} \ln \frac{b}{a}}$ . Таким образом, поскольку производимые здесь вычисления имеют логарифмическую степень точности, то небольшой областью вблизи  $R_i$ , где решения (31.5) и (31.6) следовало бы подправить, можно просто пренебречь и считать, что в области внутри  $R_i$  имеет место поле скоростей  $v = \omega_0 r$  и вне ее  $v = \frac{\omega_0 R^2}{r}$ .

Подставляем такое поле скоростей в выражение для  $E - M\omega_0$  и минимизируем его по  $R_i$ . Таким путем находим

$$\left( \frac{R}{R_i} - \frac{R_i}{R} \right)^2 = \frac{\kappa}{\omega_0 R^2} \ln \frac{b}{ae}. \quad (31.7)$$

Правая часть в (31.7) во всех интересных случаях мала, поэтому приближенно имеем

$$R - R_i = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\kappa}{\omega_0} \ln \frac{b}{ae}}. \quad (31.8)$$

Из полученной формулы мы видим, что область ирротационного движения сравнительно мала. Однако благодаря заметному логарифму (порядка 15) она доступна наблюдению. Области ирротационного движения будут также возникать в случае вращения гелия между коаксиальными цилиндрами. В этом случае будут две такие области: на внутренней и внешней границах жидкости.

Вычислим теперь интересующую нас часть свободной энергии  $E - M\omega_0$ , связанную со сверхтекучей компонентой. Подставив полученное значение  $R_i$  в (31.1) и (31.2) и учитывая малость  $R - R_i$ , находим

$$E - M\omega_0 = -\frac{1}{4} \rho_s \omega_0^2 R^4 + \frac{1}{2} \rho_s \kappa \omega_0 R^2 \ln \frac{b}{ae}. \quad (31.9)$$

Второй член в формуле (31.9) обязан наличию вихрей и, как мы видим, повышает свободную энергию. Поэтому возникающие вихри будут иметь наименьший момент, соответствующий в формуле значению  $n = 1$ .

Резюмируя сказанное, мы видим, что при вращении сосуда со сверхтекучей жидкостью возникающие вихревые нити имитируют вихревое движение практически

во всем сосуде с ротором скорости, равным удвоенной частоте вращения сосуда, т. е. так, как при вращении твердого тела или классической вязкой жидкости. При этом во всем объеме жидкости, не занятом вихревыми нитями,  $\text{rot } v_s = 0$ . Полностью свободной от вихревых нитей оказывается лишь небольшая область вблизи стенок сосуда, в которой совершается ирротационное безвихревое движение.

О критических скоростях. Вычисление критических скоростей, связанных с возможностью рождения фононов или ротоннов, согласно критерию Ландау ( $v_{\text{кр}} = \min \frac{\varepsilon}{p}$ ) дает значения, на два порядка превосходящие наблюдаемые и не зависящие от толщины капилляров. Экспериментально наблюдаемое значение критических скоростей и правильная зависимость их от толщины капилляра непосредственно следуют из возможности рождения в сверхтекучей жидкости вихревых колец. Эти своеобразные возбуждения характеризуются энергией [20]

$$\varepsilon = \rho_s \frac{R(2\pi\hbar)^2}{2m^2} \ln \frac{R}{a} \quad (31.10)$$

и импульсом

$$p = \rho_s \frac{2\pi^2 R^2 \hbar}{m}, \quad (31.11)$$

зависящими от радиуса кольца  $R$  ( $a$  — толщина ядра вихря).

Применив критерий Ландау к данной ветви спектра, получим

$$v_{\text{кр}} = \min \frac{\varepsilon}{p} = \frac{\hbar}{Rm} \ln \frac{R}{a}. \quad (31.12)$$

Полученная формула объясняет наблюдавшееся постоянство произведения  $v_{\text{кр}} R$  и дает близкое к наблюдаемым значение критических скоростей.

### § 32. Уравнения гидродинамики вращающейся сверхтекучей жидкости [22]

Уравнения гидродинамики сверхтекучей жидкости при наличии вихрей могут быть получены феноменологическим путем, с помощью законов сохранения. При этом

также выясняется вид диссипативных членов, связанных с наличием отличного от нуля  $\text{rot } v_s$ . Основное отличие рассматриваемого движения от безвихревого движения состоит в зависимости внутренней энергии жидкости от абсолютной величины  $\text{rot } v_s$ . Эта зависимость выражается в дифференциальной форме:

$$\delta \varepsilon = \lambda \delta \omega, \quad \omega = |\text{rot } v_s|. \quad (32.1)$$

Согласно (30.8) коэффициент  $\lambda$  с логарифмической степенью точности равен

$$\lambda = \rho_s \frac{\kappa}{4\pi} \ln \frac{b}{a}. \quad (32.2)$$

Далее действуем тем же способом, что и в § 17 при выводе уравнений гидродинамики при  $\text{rot } v_s = 0$ . Записываем все уравнения в форме дифференциальных законов сохранения. Уравнение непрерывности при этом остается неизменным

$$\rho + \text{div } j = 0, \quad (32.3)$$

и по существу является определением вектора потока массы жидкости  $j$ . К тензору потока импульса  $\Pi_{ik}$  и вектору потока энергии  $Q$  мы добавляем пока неизвестные члены, соответственно  $\pi_{ik}$  и  $q$ . Таким образом, уравнения сохранения энергии и импульса записываются в виде

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \text{div}(Q + q) = 0, \quad (32.4)$$

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_k} (\Pi_{ik} + \pi_{ik}) = 0. \quad (32.5)$$

Энергия единицы объема  $E$  с помощью преобразования Галилея выражается через внутреннюю энергию жидкости  $E_0$  в системе отсчета, движущейся со скоростью сверхтекучей части:

$$E = \frac{1}{2} \rho v_s^2 + j_0 v_s + E_0, \quad (32.6)$$

где  $j_0$  — импульс единицы объема жидкости в этой же системе. Он выражается через полный импульс  $j$  в неподвижной системе

$$j_0 = j - \rho v_s. \quad (32.7)$$

В термодинамическое тождество, определяющее внутреннюю энергию  $E_0$ , кроме членов, содержащихся в (17.12), необходимо добавить член  $\lambda d\omega$ , выражающий изменение энергии благодаря наличию  $\text{rot } v_s$ . Таким образом, имеем

$$dE_0 = TdS + \mu dp + (v_n - v_s, dj_0) + \lambda d\omega. \quad (32.8)$$

Невозмущенные тензор потока импульса  $\Pi_{ik}$  и поток энергии  $Q$  определяются формулами (17.19) и (17.20)

$$\Pi_{ik} = \rho v_{si} v_{sk} + v_{si} j_{0k} + v_{nk} j_{0i} + p \delta_{ik},$$

$$Q = \left( \mu + \frac{v_s^2}{2} \right) j + ST v_n + v_n (v_n, j_0),$$

где давление  $p$  равно

$$p = -E_0 + TS + \mu\rho + (v_n - v_s, j_0).$$

Полная система гидродинамических уравнений содержит еще два уравнения: уравнение сверхтекучего движения и уравнение роста энтропии

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} + (v_s \nabla) v_s + \nabla \mu = f, \quad (32.9)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \text{div } S v_n = \frac{R}{T}, \quad (32.10)$$

где вектор  $f$  и диссипативная функция  $R$  подлежат определению. Воспользуемся теперь законом сохранения энергии (32.4) для определения дополнительных членов в уравнениях гидродинамики. Для этого дифференцируем по времени левую и правую части равенства (32.6) и подставляем из уравнений (32.4), (32.5) и (32.9) производные по времени от величин  $j$ ,  $\rho$  и  $v_s$ . В результате получим

$$\begin{aligned} \dot{E} = & -\text{div } Q - \text{div}(\pi v_n) + T(\dot{S} + \text{div } S v_n) + \lambda \dot{\omega} + \lambda v_{ni} \frac{\partial \omega}{\partial r_i} + \\ & + \pi_{ik} \frac{\partial v_{ni}}{\partial r_k} + (j - \rho v_n, f + [\omega, v_n - v_s]), \end{aligned} \quad (32.11)$$

где

$$(\pi v_n)_i = \pi_{ik} v_{nk}.$$

Вводим единичный вектор  $v = \omega/\omega$  и вычисляем с помощью (32.9) производную  $\dot{\omega}$ :

$$\dot{\omega} = \frac{d}{dt} (v \text{ rot } v_s) = v \text{ rot } \{f + [\omega, v_n - v_s]\} - v \text{ rot } [\omega v_n]. \quad (32.12)$$

Подставим полученное выражение для  $\dot{\omega}$  в (32.11) и сгруппируем все члены, имеющие вид дивергенции; таким путем находим

$$\begin{aligned} E + \text{div} \{Q + (\pi v_n) + \lambda [v, f + [\omega, v_n - v_s]]\} = \\ = T(\dot{S} + \text{div } S v_n) + \left( \pi_{ik} + \frac{\lambda \omega_i \omega_k}{\omega} - \lambda \omega \delta_{ik} \right) \frac{\partial v_{ni}}{\partial r_k} + \\ + (f + [\omega, v_n - v_s], j - \rho v_n + \text{rot } \lambda v). \end{aligned} \quad (32.13)$$

Сравнив теперь (32.13) с уравнением сохранения энергии (32.4) и уравнением возрастания энтропии (32.10), получим

$$q = (\pi v_n) + \lambda [v, f + [\omega, v_n - v_s]], \quad (32.14)$$

$$\begin{aligned} R = & - \left( \pi_{ik} - \lambda \omega \delta_{ik} + \frac{\lambda \omega_i \omega_k}{\omega} \right) \frac{\partial v_{ni}}{\partial r_k} - \\ & - (f + [\omega, v_n - v_s], j - \rho v_n + \text{rot } \lambda v). \end{aligned} \quad (32.15)$$

Из требования положительности диссипативной функции  $R$  следует наиболее общий вид для функции  $f$  и тензора  $\pi_{ik}$ :

$$\begin{aligned} f = & -[\omega, v_n - v_s] + \alpha [\omega, j - \rho v_n + \text{rot } \lambda v] + \\ & + \beta [v [\omega, j - \rho v_n + \text{rot } \lambda v]] - \\ & - \gamma v (\omega, j - \rho v_n + \text{rot } \lambda v) \quad (\beta, \gamma \geq 0), \end{aligned} \quad (32.16)$$

$$\pi_{ik} = \lambda \omega \delta_{ik} - \frac{\lambda \omega_i \omega_k}{\omega} + \tau_{ik}. \quad (32.17)$$

Тензор напряжений  $\tau_{ik}$  выражается обычным образом через коэффициенты вязкости (см. (18.9)).

Импульс относительного движения согласно (32.7) равен \*)

$$j_0 = \rho_n (v_n - v_s).$$

Выразив разность  $j - \rho v_n$  через  $v_n - v_s$ :

$$j - \rho v_n = j_0 + \rho v_s - \rho v_n = -\rho_s (v_n - v_s),$$

преобразуем  $f$  к виду

$$\begin{aligned} f = & -\frac{1}{\rho_s} [\omega, \text{rot } \lambda v] - (1 + \alpha \rho_s) \left[ \omega, v_n - v_s - \frac{1}{\rho} \text{rot } \lambda v \right] - \\ & - \beta \rho_s \left[ v \left[ \omega, v_n - v_s - \frac{1}{\rho_s} \text{rot } \lambda v \right] \right] + \\ & + \gamma \rho_s v \left( \omega, v_n - v_s - \frac{1}{\rho_s} \text{rot } \lambda v \right). \end{aligned} \quad (32.18)$$

Выпишем окончательно уравнение сверхтекучего движения (32.9)

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_s}{\partial t} + (v_s \nabla) v_s + \nabla \mu = & -\frac{1}{\rho_s} [\omega, \text{rot } \lambda v] - \\ & - \beta' \rho_s \left[ \omega, v_n - v_s - \frac{1}{\rho_s} \text{rot } \lambda v \right] - \\ & - \beta \rho_s \left[ v, \left[ \omega, v_n - v_s - \frac{1}{\rho_s} \text{rot } \lambda v \right] \right] + \\ & + \gamma \rho_s v \left( \omega, v_n - v_s - \frac{1}{\rho_s} \text{rot } \lambda v \right). \end{aligned} \quad (32.19)$$

Здесь  $\beta' \rho_s = 1 + \alpha \rho_s$ . Последние три члена в (32.19) описывают силу взаимного трения, коэффициенты  $\beta$  и  $\beta'$  выражаются через коэффициенты  $B$  и  $B'$ , введенные Холлом и Вайненом [21], при помощи соотношений

$$\beta = \frac{1}{2} \frac{B \rho_n}{\rho \rho_s}, \quad \beta' = \frac{1}{2} \frac{B' \rho_n}{\rho \rho_s}. \quad (32.20)$$

\*) При наличии в жидкости выделенного направления  $\omega$  возникают, вообще говоря, эффекты, обязанные анизотропии жидкости. Это обстоятельство приводит к тому, что вместо коэффициента вязкости  $\eta$  возникает тензор вязкости  $\eta_{iklm}$ , в импульсе  $j_0$  появляется компонента вдоль направления  $\omega$  и т. д. Однако эти эффекты квадратичны по  $\omega$  и чрезвычайно малы.

Члены с  $\text{rot } \lambda v$  проявляются во взаимном трении в случае, когда имеют место поперечные изгибы вихрей. Продольная сила (последний член в (32.19)) вдоль  $\omega$  действует в том случае, когда направление отдельных вихревых нитей отклоняется от направления среднего вихря, например при тепловых колебаниях. Ввиду малости этого эффекта коэффициент  $\gamma$ , по-видимому, крайне мал. Обусловленная вихревым движением добавка к тензору потока импульса

$$\tilde{\pi}_{ik} = \lambda \omega \delta_{ik} - \frac{\lambda \omega_i \omega_k}{\omega} \quad (32.21)$$

состоит из двух частей: перенормировки давления  $\lambda \omega$  и члена, характеризующего натяжения вихрей,  $-\lambda \omega_i \omega_k / \omega$ . Из формулы (32.14), подставив выражение (32.21) для  $\pi_{ik}$ , находим выражение для дополнительного потока энергии  $q$

$$q = \lambda [v, f + [v_s \omega]]. \quad (32.22)$$

В отсутствие продольной силы ( $\gamma = 0$ ) этому выражению можно придать более изящный вид, допускающий простое истолкование. Применив к уравнению (32.19) операцию  $\text{rot}$ , имеем

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \text{rot} \{f + [v_s \omega]\} = \text{rot} [v_L \omega]. \quad (32.23)$$

Это уравнение описывает перенос вектора  $\omega$  со скоростью

$$\begin{aligned} v_L = v_s = & \frac{1}{\rho_s} \text{rot } \lambda v + \beta' \rho_s \left( v_n - v_s - \frac{1}{\rho_s} \text{rot } \lambda v \right) + \\ & + \beta \rho_s \left[ v, v_n - v_s - \frac{1}{\rho_s} \text{rot } \lambda v \right]. \end{aligned} \quad (32.24)$$

Это есть скорость движения вихревых нитей (при отсутствии продольного трения). Теперь поток энергии  $q$  может быть записан в окончательном виде

$$q = \omega \frac{\partial E_0}{\partial \omega} [v [v_L v]], \quad (32.25)$$

из которого видно, что энергия вихрей переносится в перпендикулярном к  $\omega$  направлению.

Остановимся на граничных условиях, которым должна удовлетворять сверхтекучая компонента на поверхности твердого тела и на свободной поверхности, помимо обращения в нуль нормальной компоненты скорости  $v_s$ .

В случае свободной поверхности должны быть равны, как обычно, касательные компоненты натяжений, т. е.  $\pi_{N\tau} = \omega_N \omega_\tau = 0$ . Следовательно, вихри перпендикулярны поверхности ( $N$  — вектор нормали к поверхности). На твердой поверхности имеет место несколько более сложная ситуация. Если поверхность шероховата, то вихри движутся вместе с поверхностью. В случае же проскальзывания вихрей на поверхности будет иметь место диссипация энергии. Из подсчета диссипируемой энергии можно показать, что в общем случае на поверхности, движущейся со скоростью  $u$ , будет иметь место условие (при  $\dot{\gamma} = 0$ )

$$v_L - u = \zeta [v [Nv]] + \zeta' [Nv], \quad (32.26)$$

где коэффициенты  $\zeta$  и  $\zeta'$  имеют следующий порядок величины:

$$\frac{\zeta}{B} \approx \frac{\zeta'}{B'} \approx \frac{\rho_n \hbar}{\rho m d} \quad (32.27)$$

( $d$  — средний размер шероховатостей).

Абсолютно шероховатой поверхности соответствует обращение коэффициентов  $\zeta$  и  $\zeta'$  в нуль, абсолютно гладкой поверхности —  $\zeta$  и  $\zeta' \rightarrow \infty$ .

## ГЛАВА IX

### ГИДРОДИНАМИКА СВЕРХТЕКУЧЕЙ ЖИДКОСТИ ВБЛИЗИ $\lambda$ -ТОЧКИ [23, 24]

#### § 33. Условие равновесия вблизи $\lambda$ -точки в неоднородном случае

В теории фазовых переходов второго рода обычно вводится малый параметр, характеризующий близость состояния системы к  $\lambda$ -точке. Затем термодинамические потенциалы разлагаются в ряд по этому параметру, и величина его определяется минимизацией потенциала. Такого рода теория предсказывает конечный скачок теплоемкости в  $\lambda$ -точке без каких-либо особенностей. Согласно же экспериментам теплоемкость гелия II в  $\lambda$ -точке имеет особенность. Поэтому мы не будем в дальнейшем предполагать разложимость термодинамического потенциала в ряд по степеням малого параметра «порядка» \*). Будем лишь предполагать, что термодинамический потенциал (или внутренняя энергия) является некоторой функцией указанного параметра, о которой известно, что она приводит к появлению в теплоемкости особенности  $\varepsilon^{-\alpha}$ , где  $\varepsilon = \frac{T_\lambda - T}{T_\lambda}$ ,

а  $\alpha$  — некоторый критический индекс.

Вдали от  $\lambda$ -точки мы имеем дело с идеальным газом возбуждений, и нормальная плотность жидкости  $\rho_n$ , а следовательно, и  $\rho_s$ , находятся по формуле (4.4). Вблизи  $\lambda$ -точки такой подход уже невозможен, и следует воспользоваться

\*) В последнее время была развита теория, основанная на гипотезе «подобия», которая позволяет устанавливать связи между особенностями различных термодинамических функций вблизи  $\lambda$ -точки без предположения о разложимости термодинамического потенциала.

методом малого параметра. Таким параметром может служить величина  $\rho_s$ , обращаясь в нуль в  $\lambda$ -точке. Более удобным оказывается, однако, введение некоторой комплексной функции  $\psi(x, y, z, t) = \eta e^{i\varphi}$ , определяемой таким образом, что

$$\rho_s = m |\psi|^2, \quad v_s = \frac{\hbar}{m} \nabla \varphi. \quad (33.1)$$

При достаточно малых значениях  $v_n$  и  $v_s$  энергию единицы объема  $E$  разлагаем в ряд по  $v_n$  и  $\nabla \psi$

$$E = (\rho - m |\psi|^2) \frac{v_n^2}{2} + \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi|^2 + E_0(\rho, S, |\psi|^2). \quad (33.2)$$

Зависимость внутренней энергии  $E$  от  $|\psi|^2$  в соответствии со сказанным выше не будем здесь конкретизировать.

Далее, выразив  $\psi$  через  $\rho_s$  и  $v_s$ , получим

$$\left. \begin{aligned} E &= \rho_n \frac{v_n^2}{2} + \rho_s \frac{v_s^2}{2} + \frac{\hbar^2}{8m^2} \frac{(\nabla \rho_s)^2}{\rho_s} + E_0, \\ \rho_n &= \rho - m |\psi|^2. \end{aligned} \right\} \quad (33.3)$$

Первые два члена в (33.3) представляют собой сумму кинетических энергий нормального и сверхтекучего движений. Третий же член представляет собой специфически квантовую добавку.

Перейдем в систему отсчета, движущуюся со скоростью нормального движения  $v_n$ , и введем импульс относительно движения жидкости в этой системе

$$p = j - \rho v_n = \frac{i\hbar}{2} (\psi \nabla \bar{\psi} - \bar{\psi} \nabla \psi) - m |\psi|^2 v_n. \quad (33.4)$$

Энергия  $E$  тогда согласно преобразованию Галилея равна [5]

$$E = \rho \frac{v_n^2}{2} + p v_n + E_{\text{отн}}, \quad (33.5)$$

где  $E_{\text{отн}}$  есть сумма внутренней энергии и энергии относительного движения. Сравнив (33.5) с (33.2), находим

$$E_{\text{отн}} = \frac{m}{2} \left| \left( -\frac{i\hbar}{m} \nabla - v_n \right) \psi \right|^2 + E_0(\rho, S, |\psi|^2). \quad (33.6)$$

Для нахождения равновесного значения  $\psi$  необходимо минимизировать термодинамический потенциал системы  $\Phi$ , который согласно (33.6) равен

$$\Phi = \frac{m}{2} \left| \left( -\frac{i\hbar}{m} \nabla - v_n \right) \psi \right|^2 + \Phi_0(T, p, |\psi|^2). \quad (33.7)$$

Минимум следует искать при фиксированных значениях термодинамических переменных  $T$  и  $p$  и относительной скорости  $v_s - v_n = \frac{p}{\rho_s}$  (см. (17.26)). Вводим лагранжев множитель  $u$  и варьируем интеграл  $\int \left( \Phi + \frac{1}{\rho_s} u p \right) dV$  последо-

вательно по  $\psi$  и  $v_n$ . Таким путем находим два условия

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} \left( -\frac{i\hbar}{m} \nabla - v_n \right)^2 \psi + \frac{\partial \Phi_0}{\partial \rho_s} m \psi - \\ - \frac{i\hbar}{2} \left( \nabla \frac{u}{\rho_s} \psi + \frac{u}{\rho_s} \nabla \psi \right) - m v_n u \psi - \frac{u p}{\rho_s^2} m \psi = 0, \end{aligned} \quad (33.8)$$

$$p + u = 0. \quad (33.9)$$

Исключив лагранжев множитель  $u$  из этих двух условий, получаем уравнение, определяющее равновесное значение  $\psi$ :

$$\left[ \frac{1}{2} \left( -\frac{i\hbar}{m} \nabla - v_n \right)^2 + \mu_s + \frac{i\hbar}{2m\rho_s} \operatorname{div} p \right] m \psi = 0, \quad (33.10)$$

где

$$\mu_s = \left( \frac{\partial \Phi_0}{\partial \rho_s} \right)_{T, p} = \left( \frac{\partial E_0}{\partial \rho_s} \right)_{\rho, S}. \quad (33.11)$$

Уравнение (33.10) напоминает основное уравнение теории Гинзбурга — Ландау для сверхпроводников. Однако в теории сверхпроводимости функция  $\psi$  (ее модуль и фаза) полностью определяется заданным магнитным полем и поэтому минимум термодинамического потенциала находится при фиксированном значении векторного потенциала э.м. поля  $A$ .

В работе [23] уравнение, определяющее равновесное значение  $\psi$ , находилось варьированием полной энергии  $E$  по  $\psi$  при фиксированном значении импульса  $j = p + \rho v_n$ . В полученном таким путем уравнении отсутствует по сравнению с (33.10) член  $\frac{i\hbar}{2m\rho_s} \operatorname{div} p$ . Полученное в [23]

условие эквивалентно двум условиям. Его вещественная часть совпадает с уравнением (33.10), а мнимая дает лишнее условие  $\operatorname{div} \mathbf{p} = 0$ , для которого нет никаких оснований. Такой результат явился следствием необоснованного предположения об экстремуме  $E$  относительно  $\psi$  при фиксированном  $j$ . Из условия минимума энергии может быть найдено равновесное значение  $\rho_s$ . При этом в качестве независимых переменных, значения которых должны быть фиксированы, необходимо выбрать: плотность  $\rho$ , энтропию  $S$ , импульс  $j$  и скорость сверхтекучего движения  $\mathbf{v}_s$ . В том, что такой выбор переменных является естественным, можно убедиться в предельном случае, когда градиенты  $\rho_s$  малы и специфически квантовые эффекты малы. В этом случае уравнения гидродинамики могут быть получены из закона сохранения энергии. При этом энергия выражается как функция  $\rho$ ,  $S$ ,  $j$  и  $\mathbf{v}_s$  и используются законы сохранения для этих величин (§ 17).

В данной задаче у нас появилась новая независимая переменная  $\rho_s$ , равновесное значение которой может быть найдено из условия минимума полной энергии  $\int E dV$  относительно  $\rho_s$  при фиксированных значениях всех остальных переменных. Варьируя  $\int E dV$  по  $\rho_s$ , получаем искомое условие

$$-\frac{\hbar^2}{4m^2} \Delta \rho_s + \frac{\hbar^2}{8m^2 \rho_s} (\nabla \rho_s)^2 + \rho_s \frac{(\mathbf{v}_s - \mathbf{v}_n)^2}{2} + \rho_s \mu_s = 0.$$

Выразив в этом уравнении  $\rho_s$  и  $\mathbf{v}_s$  через  $\psi$  с помощью (33.1), запишем полученное условие в форме уравнения для  $\psi$

$$\left[ \frac{1}{2} \left( -\frac{i\hbar}{m} \nabla - \mathbf{v}_n \right) + \mu_s + \frac{i\hbar}{2m\rho_s} \operatorname{div} \mathbf{p} \right] m\psi = 0,$$

т. е. мы снова получаем условие (33.10). Приведенный вывод указывает на то, что равновесное значение модуля функции  $\psi$  (плотности  $\rho_s$ ) соответствует минимуму энергии при заданной фазе  $\psi$  (скорости  $\mathbf{v}_s$ ).

### § 34. Уравнения гидродинамики вблизи $\lambda$ -точки

В нестационарном случае предполагается, что состояние системы определяется заданием  $\psi$  (так же как и других термодинамических величин), т. е.  $\psi$  удовлетворяет

линейному дифференциальному уравнению по  $t$ . По аналогии с квантовой механикой уравнение для  $\psi$  записывается в виде

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{L}\psi, \quad (34.1)$$

где  $\hat{L}$  — некоторый линейный оператор. Поскольку величина  $\rho_s$  может релаксировать, то оператор  $\hat{L}$  содержит неэрмитову часть. Эрмитова часть оператора  $\hat{L}$  по аналогии с уравнением Шредингера записывается в виде

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U, \quad (34.2)$$

где

$$U = \left( \frac{\partial E_0}{\partial |\psi|^2} \right)_{\rho_n, S} = (\mu + \mu_s) m. \quad (34.3)$$

Здесь  $\mu$  и  $\mu_s$  определяются термодинамическим тождеством для

$$dE_0 = Tds + \mu d\rho + \mu_s d\rho_s. \quad (34.4)$$

$U$  представляет собой потенциальную энергию сверхтекучей части жидкости.

Что касается антиэрмитовой части, описывающей приближение  $\rho_s$  к равновесному значению, то ее при малом отклонении от равновесия можно записать в виде

$$i\Lambda \left[ \frac{1}{2} \left( -\frac{i\hbar}{m} \nabla - \mathbf{v}_n \right)^2 + \mu_s + \frac{i\hbar}{2m\rho_s} \operatorname{div} \mathbf{p} \right] m\psi, \quad (34.5)$$

где  $\Lambda$  — некоторый безразмерный кинетический коэффициент. Окончательно имеем следующее уравнение для  $\psi$ :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + (\mu + \mu_s) m\psi - i\Lambda \left[ \frac{1}{2} \left( -\frac{i\hbar}{m} \nabla - \mathbf{v}_n \right)^2 + \mu_s + \frac{i\hbar}{2m\rho_s} \operatorname{div} \mathbf{p} \right] m\psi. \quad (34.6)$$

Коэффициент  $\Lambda$  должен быть действительным, так как в противоположном случае возможен был бы перенос сверхтекучей части жидкости нормальной скоростью.



Остальные уравнения гидродинамики записываются, как обычно, в форме законов сохранения:

массы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad (34.7)$$

импульса

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = 0, \quad (34.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \Pi_{ik} &= \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_k} - \psi \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x_i \partial x_k} + \text{к.с.} \right) + \\ &\quad + \rho_n v_{ni} v_{nk} + p \delta_{ik}, \\ p &= -E_0 + TS + \mu p + \mu_s \rho_s \end{aligned} \right\} \quad (34.9)$$

и, наконец, закона возрастания энтропии

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div} S \mathbf{v}_n = \frac{R}{T}, \quad (34.10)$$

в котором диссипативная функция находится из закона сохранения энергии в виде

$$R = \frac{2\Lambda}{\hbar} \left| \left[ \frac{1}{2} \left( -\frac{i\hbar}{m} \nabla - \mathbf{v}_n \right)^2 + \mu_s + \frac{i\hbar}{2m\rho_s} \operatorname{div} \mathbf{p} \right] m\psi \right|^2. \quad (34.11)$$

В уравнениях (34.9) и (34.10) опущены диссипативные члены, обязанные вязкости и теплопроводности. Эти члены имеют обычный вид (§ 18). Как будет видно из дальнейшего, они не играют существенной роли в процессах диссипации звука в сверхтекучем гелии вблизи  $\lambda$ -точки.

В случае малых градиентов заменяем всюду  $-\frac{i\hbar}{m} \nabla \psi$  на  $\mathbf{v}_s$ . В результате уравнения (34.6), (34.7) приобретают следующий простой вид:

$$\dot{\mathbf{v}}_s + \nabla \left( \frac{v_s^2}{2} + \mu + \mu_s \right) = 0, \quad (34.12)$$

$$\dot{\rho} + \operatorname{div} (\rho_s \mathbf{v}_s + \rho_n \mathbf{v}_n) = 0, \quad (34.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_s v_{si} + \rho_n v_{ni}) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho_n v_{ni} v_{nk} + \rho_s v_{si} v_{sk} + p \delta_{ik}) = 0, \quad (34.14)$$

и

$$\dot{S} + \operatorname{div} S \mathbf{v}_n = \frac{2\Lambda m}{\hbar} \left[ \mu_s + \frac{(v_n - v_s)^2}{2} \right]^2 \rho_s, \quad (34.15)$$

$$\dot{\rho}_s + \operatorname{div} (\rho_s \mathbf{v}_s) = -\frac{2\Lambda m}{\hbar} \left[ \mu_s + \frac{(v_n - v_s)^2}{2} \right] \rho_s. \quad (34.16)$$

Приведенные выше уравнения мы применим для исследования вопроса о распространении звука. Они отличаются от полученных в работе [23] тем, что в уравнениях (34.12) и (34.15) отсутствуют диссипативные члены типа второй вязкости, содержащие коэффициент  $\Lambda$ .

### § 35. О механизме релаксации вблизи $\lambda$ -точки

Релаксация плотности сверхтекучей компоненты  $\rho_s$  описывается правой частью уравнения (34.16). При этом скорость приближения к равновесию определяется кинетическим коэффициентом  $\Lambda$ . Рассмотрим механизм диссипации звуковой энергии вблизи  $\lambda$ -точки. Система характеризуется некоторой корреляционной длиной  $\xi$ . На длинах порядка  $\xi$  корреляция фазы  $\phi$  затухает. Согласно уравнению (34.12) эта же длина будет характерной и для корреляций температуры. Очевидно, поэтому, что второй звук может распространяться лишь в том случае, когда  $k\xi \ll 1$ , где  $k$  — волновой вектор второго звука, т. е. когда длина волны второго звука больше корреляционной длины  $\xi$ . Волны второго звука с длиной волны порядка  $\xi$  будут полностью диссипироваться. Таким образом, имеется некоторое характерное время  $\tau = \xi/u_2$  ( $u_2$  — скорость второго звука), определяющее скорость диссипации энергии волн второго звука. Диссипация энергии в первом звуке осуществляется тогда путем распада на волны второго звука и характеризуется тем же временем.

Задавшись таким механизмом диссипации, мы легко находим температурную зависимость безразмерного коэффициента  $\Lambda$ . Очевидно, что  $\Lambda$  может зависеть только от  $u_2$  и  $\xi$ , причем скорость релаксации должна быть пропорциональна скорости второго звука. Используя также имеющиеся в нашем распоряжении размерные константы  $\hbar$  и  $m$ , находим

$$\Lambda \approx \frac{mu_2 \xi}{\hbar}. \quad (35.1)$$

Такое определение величины  $\Lambda$  эквивалентно введению характерного времени  $\tau = \xi/u_2$ . Действительно, из (34.6) следует, что характерное время релаксации  $\tau$  определяется соотношением

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2\Lambda m}{\hbar} \frac{\partial \mu_s}{\partial \rho_s} \rho_s. \quad (35.2)$$

Особая часть потенциала  $\mu_s$  по определению  $\xi$  имеет порядок  $\hbar^2/m^2\xi^2$ . Поэтому из (35.1) и (35.2) следует

$$\frac{1}{\tau} \cong \frac{u_2 \xi m^2}{\hbar^2} \frac{\hbar^2}{m^2 \xi^2} \sim \frac{u_2}{\xi}. \quad (35.3)$$

Покажем, что так определенное время релаксации имеет универсальную зависимость от температуры, не зависящую от критических индексов теории подобия, т. е. не зависящую от вида особенности в термодинамических функциях вблизи  $\lambda$ -точки. Действительно, из выражения для  $u_2$

$$u_2 = \sqrt{\frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\sigma^2 \Gamma}{C}}$$

и очевидных соотношений для особой части теплоемкости  $C$

$$C \sim \frac{T_k}{\rho} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial T^2} \sim \frac{\rho_s}{\rho} \frac{\hbar^2}{m^2 \xi^2} \frac{1}{T_k \varepsilon^2}, \quad \varepsilon = \frac{T_k - T}{T_k}$$

получаем

$$\frac{1}{\tau} \sim \frac{m \sigma T_k}{\hbar} \varepsilon \sim \varepsilon. \quad (35.4)$$

Таким образом, время релаксации  $\tau$  обратно пропорционально разности  $(T_k - T)$ . Любопытно, что формула (35.4) дает правильный порядок величины времени  $\tau$ , хорошо согласующийся с экспериментальными данными ( $1/\tau \sim 10^{11} \text{ с}^{-1}$ ).

Заметим, что обычная вязкость и теплопроводность, обязанные столкновениям возбуждений, будут характеризоваться очень малыми временами совсем другого порядка, и поэтому их вклад в диссипацию энергии звука будет незначительным.

### § 36. Дисперсия звука

Для исследования распространения звука переписываем систему уравнений (34.12) — (34.15) в линеаризованном виде, после чего исключаем скорости  $v_n$  и  $v_s$ . В результате получаем два волновых уравнения

$$\ddot{\rho} - \Delta p = 0, \quad (36.1)$$

$$\ddot{\sigma} - \frac{\rho_s}{\rho} \sigma^2 \Delta T + \frac{\rho_s \sigma}{\rho} \Delta \mu_s = 0, \quad (36.2)$$

в которых ввиду малости  $\rho_s$  всюду положено  $\rho_n = \rho$ . Уравнение (34.16), описывающее релаксацию  $\rho_s$ , при этом приобретает следующий вид:

$$\dot{\rho}_s + \frac{\rho}{\sigma} \dot{\sigma} = - \frac{2\Lambda m}{\hbar} \mu_s' \rho_s, \quad (36.3)$$

где  $\mu_s'$  — переменная часть потенциала  $\mu_s$ , так как условие равновесия в линейном приближении обращается в требование  $\mu_s = 0$ .

Термодинамическое тождество для потенциала  $w = \mu + T\sigma$  согласно (34.4) записывается в виде

$$dw = T d\sigma + \frac{1}{\rho} dp - \frac{\rho_s}{\rho} d\mu_s. \quad (36.4)$$

Мы используем это тождество для установления связей между производными от термодинамических функций. Если выбрать в качестве независимых переменных давление  $p$  и энтропию на единицу массы  $\sigma$ , то уравнения (36.1) и (36.2) полностью расцепляются благодаря чрезвычайной малости разности  $C_p - C_v$  и отношения квадратов скоростей  $u_2^2/u_1^2$ .

Подчеркнем, что это не означает пренебрежения разностью  $C_p - C_v$  в окончательных формулах. Отбрасываются лишь члены относительного порядка  $\left(\frac{C_p}{C_v} - 1\right) \frac{u_2^2}{u_1^2}$ .

С такой точностью из уравнения (36.1) находим выражение для квадрата скорости первого звука

$$\frac{1}{u_1^2} = \frac{k^2}{\omega^2} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial p}\right)_\sigma, \quad (36.5)$$

а из (36.2) — для квадрата скорости второго звука

$$u_2^2 = \frac{\rho_s}{\rho} \sigma^2 \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right)_p - \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\partial \mu_s}{\partial \sigma} \right)_p \right]. \quad (36.5')$$

Воспользуемся теперь уравнением (36.3). Из уравнения (36.5) находим выражения для дисперсии скорости первого звука

$$\frac{1}{u_1^2} = \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{\sigma, \mu_s} + \left( \frac{\partial \rho}{\partial \mu_s} \right)_{\sigma, p} \frac{\partial \mu_s}{\partial p} = \frac{1}{u_{10}^2} - \left( -\frac{1}{u_{10}^2} + \frac{1}{u_{1\infty}^2} \right) \frac{i\omega\tau}{1 - i\omega\tau}, \quad (36.6)$$

где  $u_{10}$  — равновесная скорость звука при  $\omega \rightarrow 0$ , равная

$$\frac{1}{u_{10}^2} = \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{\sigma, \mu_s} = \frac{C_p}{C_v} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_{T, \mu_s}, \quad (36.7)$$

$u_{1\infty}$  — скорость звука в пределе  $\omega\tau \gg 1$ , когда равновесное значение  $\rho_s$  не успевает следить за звуковой волной. Разность  $u_{1\infty} - u_{10}$  находится из соотношения

$$\frac{1}{u_{10}^2} - \frac{1}{u_{1\infty}^2} = \left( \frac{\partial \rho_s}{\partial p} \right)_\sigma \frac{\partial \rho}{\partial \mu_s} = \rho^2 \frac{\partial \rho_s}{\partial p} \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{\rho_s}{\rho} \right) \left( \frac{\partial \mu_s}{\partial \rho_s} \right)_{p, \sigma}. \quad (36.8)$$

Здесь мы воспользовались тождеством (36.4), согласно которому

$$\frac{\partial \rho}{\partial \mu_s} = \rho^2 \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{\rho_s}{\rho} \right). \quad (36.9)$$

Время  $\tau$  определяется соотношением

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2\Lambda m}{\hbar} \left( \frac{\partial \mu_s}{\partial \rho_s} \right)_{p, \sigma} \rho_s. \quad (36.10)$$

В переменных  $p, T$  формула (36.8) приобретает вид

$$\frac{1}{u_{10}^2} - \frac{1}{u_{1\infty}^2} = \left[ \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\rho_s}{\rho} \right) \frac{\partial \rho}{\partial T} \middle/ \frac{\partial \sigma}{\partial T} - \rho \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{\rho_s}{\rho} \right) \right]^2 \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \mu_s}{\partial \rho_s} \right)_{p, \sigma}. \quad (36.11)$$

Особая часть производной  $\frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{\rho_s}{\rho} \right)$ , очевидно, равна  $\frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\rho_s}{\rho} \right) \frac{\partial T_k}{\partial p}$ , т. е. выражается через производную вдоль кривой  $T_k(p)$ . Благодаря этому особые части обоих слагаемых в квадратной скобке в (36.11) сокращаются, и скобка имеет порядок  $\varepsilon^\alpha (\rho_s/\varepsilon)$ , где  $\alpha$  — индекс, характеризующий особенность в теплоемкости  $C \sim \varepsilon^{-\alpha}$ . Производная  $\partial \mu_s / \partial \rho_s$  имеет порядок  $\Phi_0 / \rho_s^2 \sim \varepsilon^{2-\alpha} / \rho_s^2$ . Таким образом, разность  $u_{10} - u_{1\infty}$  имеет порядок  $\varepsilon^\alpha$ , т. е. стремится к нулю.

Формула (36.6) описывает дисперсию первого звука, т. е. справедлива в области  $\omega\tau \gtrsim 1$ . Действительно, в той области, где  $\omega\tau \sim k u_1 \frac{\xi}{u_2} \sim 1$ , имеем  $k\xi \ll 1$ , поскольку  $u_2 / u_1 \ll 1$ . Таким образом, в области, где  $\omega\tau \gtrsim 1$ , длина волны звука еще больше корреляционной длины \*).

Перейдем теперь ко второму звуку. В этом случае условие  $\omega\tau \sim 1$  совпадает с условием  $k\xi \sim 1$ . Поэтому законно рассматривать лишь случай  $\omega\tau \ll 1$ , т. е. случай малого затухания. Из формулы (36.5') и уравнения (36.3) в этом случае получаем

$$U_2^2 = U_{20}^2 \left[ 1 - i\omega\tau \left( \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)_{\mu_s} \left( \frac{\partial \mu_s}{\partial \rho_s} \right) \left( \frac{\partial \rho_s}{\partial \sigma} + \frac{\rho}{\sigma} \right) \left( \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\rho_s}{\rho} \right) + \frac{1}{\sigma} \right) \right]. \quad (36.12)$$

Функция  $\rho_s$ , как следует из теории подобия, изменяется с температурой по закону  $1/\xi \sim \varepsilon^{(2-\alpha)/3}$ . Поэтому  $\frac{\partial \rho_s}{\partial \sigma} \gg \frac{\rho}{\sigma}$  \*\*).

Введем теплоемкость  $C_{\rho_s} = T \left( \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)_{\rho_s}$ , характерную для быстрых процессов, когда при изменении температуры плотность  $\rho_s$  не успевает измениться. Из термодинамиче-

\* В области, где  $k\xi \gtrsim 1$ , формула (36.6) будет также справедлива. Однако в этом случае время релаксации определяется процессами распада на кванты звука с критической длиной волны  $\xi$ . Поэтому характерное время имеет порядок  $\tau \sim \xi / u_1$  и изменяется с температурой по тому же закону, что и  $\xi$ . В модели статистического подобия имеем  $\varepsilon^{2-\alpha} \xi^3 \sim 1$ , т. е.  $\xi \sim \varepsilon^{-(2-\alpha)/3}$ .

\*\* Лишь в предельном случае термодинамической теории Ландау ( $\rho_s \sim \varepsilon$ ) указанные члены имеют одинаковый порядок величины.

ского тождества (36.4) следует связь между  $C_{\rho_s}$  и равновесным значением теплоемкости  $C_0 = T \left( \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)_{\mu_s}$ :

$$\frac{C_0}{C_{\rho_s}} - 1 = \left( \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)_{\mu_s} \left( \frac{\partial \mu_s}{\partial \rho_s} \right)_\sigma \left( \frac{\partial \rho_s}{\partial \sigma} \right) \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\rho_s}{\rho} \right). \quad (36.13)$$

С помощью (36.13) формулу (36.12) можно переписать в следующем простом виде:

$$u_2^2 = u_{20}^2 \left[ 1 - i\omega\tau \left( \frac{C_0}{C_{\rho_s}} - 1 \right) \right]. \quad (36.14)$$

Формулы (36.6) и (36.14) позволяют вычислить коэффициент затухания соответственно первого и второго звуков. Имеем

$$\alpha_1 = \operatorname{Im} \frac{\omega}{u_1} = \frac{\omega^2 \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} \frac{1}{2u_{10}} \left( 1 - \frac{u_{10}^2}{u_{1\infty}^2} \right), \quad (36.15)$$

$$\alpha_2 = \operatorname{Im} \frac{\omega}{u_2} = \omega^2 \tau \frac{1}{2u_{20}} \left( \frac{C_0}{C_{\rho_s}} - 1 \right). \quad (36.16)$$

Поскольку разность  $u_{1\infty} - u_{10} \sim \varepsilon^\alpha$  и  $\tau \sim 1/\varepsilon$ , то  $\alpha_1 \sim \varepsilon^{-1+\alpha}$ , что хорошо согласуется с температурной зависимостью  $\alpha_1$ , наблюдавшейся в опытах Бармача и Рудника [25] \*).

Эксперименты по наблюдению затухания второго звука ниже  $\lambda$ -точки, приведенные Тайсоном [26], подтверждают температурную зависимость  $\alpha_2$ , следующую из (36.16). Разность  $C_0/C_{\rho_s} - 1$  при малых  $\varepsilon$  не зависит от температуры. Действительно, согласно (36.13) имеем

$$\frac{C_0}{C_{\rho_s}} - 1 \sim \frac{1}{C_0} \left( \frac{\partial \rho_s}{\partial T} \right)^2 \frac{\partial \mu_s}{\partial \rho_s} \sim \frac{1}{\varepsilon^{-\alpha}} \frac{\rho_s^2}{\varepsilon^2} \frac{\varepsilon^{2-\alpha}}{\rho_s^2} \sim \text{const.}$$

В работе [6] затухание второго звука характеризуется константой затухания, которая определяется следующим

\*) Эксперименты указывают на то, что особенность в теплоемкости — логарифмическая или степенная с очень малым показателем  $\alpha$ , так что при сравнении с экспериментом можно полагать  $\alpha = 0$ .

образом:

$$D_2 = \frac{\operatorname{Im} \omega}{k^2}$$

и согласно (36.16) равна

$$D_2 = u_{20}^2 \tau \left( \frac{C_0}{C_{\rho_s}} - 1 \right). \quad (36.17)$$

Из (36.17) следует температурная зависимость

$$D_2 \sim \frac{\rho_s}{C_0} \frac{1}{\varepsilon} \sim \frac{\varepsilon^{(2-\alpha)/3}}{\varepsilon^{1-\alpha}} \sim \varepsilon^{(1+2\alpha)/3},$$

хорошо согласующаяся с экспериментальными данными [26] и предсказаниями теории динамического подобия. Заметим, что для затухания первого звука теория динамического подобия, вообще говоря, не применима. Зависимость  $\alpha_1 \sim \varepsilon^{-1+\alpha}$  не может быть получена из соображений только подобия.

Задача о дисперсии первого звука полностью аналогична задаче о дисперсии звука при наличии медленных процессов приближения к состоянию равновесия в обычной гидродинамике. И формула (36.6) имеет типичный вид, который дает теория Мандельштама — Леонтовича в обычной гидродинамике. Что же касается второго звука, то здесь благодаря наличию третьего члена в уравнении (36.2), содержащего явно  $\mu_s$ , ситуация несколько отличается от обычной. Правда, этот член в случае сверхтекучего гелия мал, однако в предельном случае классической теории фазовых переходов Ландау он имеет такой же порядок величины, как и первые два члена в (36.2).

Система гидродинамических уравнений для сверхтекучей жидкости вблизи  $\lambda$ -точки содержит лишнее уравнение для функции  $\rho_s$ , по сравнению с обычными уравнениями двухкомпонентной гидродинамики. Могло бы показаться, что это должно приводить к возможности распространения нового типа колебаний. Однако уравнение (34.16) имеет вид уравнения непрерывности и, исключив из него и уравнений (34.13) и (34.15)  $\operatorname{div} \mathbf{v}_s$ , мы получим лишь связь между изменениями термодинамических величин и  $\rho_s$  в звуковых волнах. Нового волнового уравнения не возникает и поэтому нет новых типов колебаний.

или после несложного преобразования

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{np_i} + \frac{\partial}{\partial r_k} \overline{np_i \frac{\partial H}{\partial p_k}} + \overline{n \frac{\partial H}{\partial r_i}} = 0. \quad (37.3)$$

Здесь и в дальнейшем чертой будем обозначать интегрирование по  $p$ -пространству. Подставив в (37.3) выражение (37.2) для  $H$ , получим уравнение движения

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{np_i} + \frac{\partial}{\partial r_k} \overline{np_i \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} + v_{sk} \right)} + \overline{n \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial r_i} + \frac{\partial}{\partial r_i} p v_s \right)} = 0, \quad (37.4)$$

определяющее изменение во времени полного импульса относительно движения нормальной и сверхтекучей частей.

Запишем теперь уравнение движения для полного импульса:

$$\dot{j} = \overline{pn} + \rho v_s. \quad (37.5)$$

Поскольку полный импульс сохраняется, то производная от него по времени равна дивергенции симметричного тензора потока импульса  $\Pi_{ik}$  (17.3):

$$\frac{\partial}{\partial t} j_i + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial r_k} = 0. \quad (37.6)$$

Тензор потока импульса  $\Pi_{ik}$  в неподвижной системе отсчета согласно (17.8) можно выразить через его значение  $\pi_{ik}$  в системе отсчета, движущейся со скоростью  $v_s$ :

$$\Pi_{ik} = \pi_{ik} + v_{sk} \overline{np_i} + v_{si} \overline{np_k} + \rho v_{si} v_{sk}. \quad (37.7)$$

Вычтем из уравнения (37.6) уравнение (37.4) и воспользуемся уравнением непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_k} (\overline{np_k} + \rho v_{sk}) = 0. \quad (37.8)$$

В результате получим

$$\rho \frac{\partial v_{si}}{\partial t} + \rho v_{sk} \frac{\partial v_{si}}{\partial r_k} + \frac{\partial \pi_{ik}}{\partial r_k} - \overline{n \frac{\partial \varepsilon}{\partial r_i}} - \frac{\partial}{\partial r_k} \overline{np_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k}} = 0. \quad (37.9)$$

## ГЛАВА X

### КИНЕТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В СВЕРХТЕКУЧЕЙ ЖИДКОСТИ

#### § 37. Кинетическое уравнение для элементарных возбуждений [13]

Функция распределения элементарных возбуждений удовлетворяет кинетическому уравнению

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial r} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial n}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial r} = I(n), \quad (37.1)$$

где  $I(n)$  — интеграл столкновений, конкретный вид которого пока для нас несуществен. Гамильтониан  $H$  квази-частицы при наличии сверхтекучего движения со скоростью  $v_s$  равен

$$H = \varepsilon(p) + p v_s, \quad (37.2)$$

где  $\varepsilon(p)$  — ее энергия в системе отсчета, в которой сверхтекучая компонента покоится. Исходя из кинетического уравнения, можно получить уравнения гидродинамики сверхтекучей жидкости. При этом находятся выражения для потоков импульса и энергии, необходимые для вычисления кинетических коэффициентов. Умножим уравнение (37.1) на компоненту импульса  $p_i$  и проинтегрируем по всему  $p$ -пространству. Благодаря закону сохранения импульса интеграл от правой части равен нулю; таким путем получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int n p_i d\tau_p + \int p_i \frac{\partial n}{\partial r_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} d\tau_p - \int p_i \frac{\partial n}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial r_k} d\tau_p = 0,$$

Из условия  $\text{rot } \mathbf{v}_s = 0$  следует, что сумма последних трех членов в (37.9) должна быть произведением плотности  $\rho$  на градиент некоторой функции. Производную  $\partial \varepsilon / \partial r_i$ , очевидно, можно переписать в виде  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial r_i}$ . Кроме того, тензор  $\pi_{ik}$  при абсолютном нуле в отсутствие возбуждений должен быть равен  $p_0 \delta_{ik}$  ( $p_0$  — давление сверхтекучего гелия при  $T = 0$ ). Из этих требований однозначно следует вид тензора  $\pi_{ik}$ :

$$\pi_{ik} = n p_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} + \delta_{ik} \left( p_0 + n \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \rho \right), \quad (37.10)$$

причем согласно термодинамическому тождеству (17.26)

$$\frac{\partial p_0}{\partial r_i} = \rho \frac{\partial \mu_0}{\partial r_i} \quad (37.11)$$

( $\mu_0$  — значение химического потенциала при  $T = 0$ ).

Подставим (37.10) в уравнение (37.9) с учетом (37.11), в результате получим

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} + \nabla \left\{ \mu_0 + n \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} + \frac{v_s^2}{2} \right\} = 0. \quad (37.12)$$

Таким образом мы получим уравнение сверхтекучего движения. Сравнив (37.12) с (17.25), убеждаемся в том, что химический потенциал  $\mu$  равен

$$\mu = \mu_0 + \int n \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} d\tau_p; \quad (37.13)$$

второй член в этой формуле обязан вкладу возбуждений.

Получим теперь выражение для вектора потока энергии  $\mathbf{Q}$ . Для этого вычислим производную по времени от полной энергии системы и выразим все производные по времени с помощью уравнений движения, уравнения непрерывности и кинетического уравнения через координатные производные. Затем, сгруппировав все члены под знаком  $\text{div}$ , получим выражение для  $\mathbf{Q}$ . Полная энергия  $E$  (17.9) складывается из кинетической энергии:

$$E_k = \rho \frac{v_s^2}{2} + v_s \overline{n p}, \quad (37.14)$$

внутренней энергии газа возбуждений

$$E_b = n \overline{\varepsilon} \quad (37.15)$$

и нулевой энергии  $E_0$  (при  $T = 0$ ), определяемой тождеством

$$dE_0 = \mu_0 d\rho. \quad (37.16)$$

Производная по времени от кинетической энергии согласно (37.4), (37.8) и (37.12) равна

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} E_k = & -(\rho v_{si} + \overline{n p_i}) \frac{\partial}{\partial r_i} \left( \mu_0 + \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial \rho} + \frac{v_s^2}{2} \right) - \\ & - \frac{v_s^2}{2} \frac{\partial}{\partial r_i} (\rho v_{si} + \overline{n p_i}) - v_{si} \frac{\partial}{\partial r_k} \overline{n p_i} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} + v_{sk} \right) - \\ & - v_{si} \left( n \frac{\partial \varepsilon}{\partial r_i} + \overline{n p_k} \frac{\partial v_{sk}}{\partial r_i} \right). \end{aligned} \quad (37.17)$$

Для нахождения производной от внутренней энергии умножаем левую и правые части кинетического уравнения на  $\varepsilon$  и интегрируем по всему пространству. Интеграл от правой части при этом равен нулю, поскольку при соударениях энергия сохраняется, и мы получаем

$$\varepsilon \frac{\partial n}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial n}{\partial r_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \varepsilon \frac{\partial n}{\partial p_k} \frac{\partial H}{\partial r_k} = 0, \quad (37.18)$$

или, после несложного преобразования,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \overline{n \varepsilon} + \frac{\partial}{\partial r_k} \overline{n \varepsilon} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} + v_{sk} \right) - v_{sk} \overline{n} \frac{\partial \varepsilon}{\partial r_k} - \\ - \overline{n} \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} \overline{p_i} \frac{\partial v_{si}}{\partial r_k} + \overline{n} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial r_k} (\overline{n p_k} + \rho v_{sk}) = 0. \end{aligned} \quad (37.19)$$

Используя уравнения (37.16), (37.17) и (37.19), находим производную по времени от полной энергии

$$\frac{\partial E}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial r_k} \left\{ (\overline{n p_k} + \rho v_{sk}) \left( \mu_0 + n \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} + \frac{v_s^2}{2} \right) + n H \frac{\partial}{\partial p_k} H \right\}. \quad (37.20)$$

Таким образом, вектор потока энергии  $Q$  равен

$$Q = (\overline{n\mathbf{p}} + \rho \mathbf{v}_s) \left( \mu_0 + n \overline{\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}} + \frac{v_s^2}{2} \right) + nH \overline{\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}} H. \quad (37.21)$$

### § 38. Кинетические коэффициенты

Функция распределения для возбуждений в движущемся равномерно и находящемся в равновесии сверхтекучем гелии равна

$$n_0 = \left[ \exp \left( \frac{\varepsilon + \mathbf{p} \mathbf{v}_s - \mathbf{p} \mathbf{v}_n}{kT} \right) - 1 \right]^{-1}. \quad (38.1)$$

Равновесная функция  $n_0$  удовлетворяет кинетическому уравнению, обращая интеграл столкновений в нуль. В случае, когда равновесие нарушено, функция распределения  $n$  отличается от равновесного значения и должна быть найдена решением кинетического уравнения. Эта в общем случае неразрешимая задача упрощается для слабо неравновесных состояний, в которых отклонение от состояния равновесия мало. Отклонение от состояния равновесия в этом случае полностью определяется заданием первых производных от скоростей  $\mathbf{v}_n$  и  $\mathbf{v}_s$  и термодинамических переменных по координатам, величины которых предполагаются малыми. Другими словами, скорости  $\mathbf{v}_n$  и  $\mathbf{v}_s$  и термодинамические переменные медленно меняются вдоль системы, так что в кинетическом уравнении всеми старшими производными и степенями первых производных можно пренебречь.

Рассмотрим слабо неравновесное состояние системы. Тогда можно считать, что в каждом данном небольшом участке системы имеется приближенно локальное равновесие, т. е. что функция распределения может быть представлена в виде

$$n = n_0 + n_1, \quad (38.2)$$

где  $n_1 \ll n_0$  и  $n_0$  есть равновесная функция (38.1), зависящая от локальных значений скоростей и термодинамических переменных. При подстановке в кинетическое уравнение (37.1) функции распределения (38.1) в левой части достаточно ограничиться дифференцированием функции

$n_0$ , так как малая добавка  $n_1$  сама содержит первые производные, и ее дифференцирование приводит к появлению старших производных, которыми можно пренебречь. Правая же часть — интеграл столкновений — при подстановке функций распределения вида  $n_0$  обращается в нуль, и в ней в первом приближении можно ограничиться линейными по  $n_1$  членами. Таким образом, задача линеаризуется — мы получаем линейное интегральное уравнение, левая часть которого задана и выражается через первые производные от скоростей и термодинамических переменных. Подставим функцию распределения  $n_0$  в левую часть кинетического уравнения. При этом, наряду с малостью пространственных производных, будем считать малой разность скоростей  $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$ . Последнее обстоятельство несколько не ограничивает задачу, поскольку разность скоростей  $\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s$  должна быть мала по сравнению со скоростью звука (первого и второго). Как известно, сверхтекучесть нарушается значительно раньше, чем этот предел может быть достигнут. Вычислим сначала производную по времени; согласно (37.1) имеем \*)

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} = n' \left\{ \frac{1}{kT} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \mathbf{p} \frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} + \mathbf{p} \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} \right) - \frac{\varepsilon}{kT^2} \frac{\partial T}{\partial t} \right\}. \quad (38.3)$$

Выбираем в качестве независимых переменных плотность  $\rho$  и энтропию  $S$ . Выразим производные по времени через пространственные производные; в линейном приближении согласно (17.22) — (17.25) имеем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{j}, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = -S \operatorname{div} \mathbf{v}_n, \quad \rho_n \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_s) = -S \nabla T. \quad (38.4)$$

С учетом (38.4) преобразуем (38.3) к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_0}{\partial t} = \frac{n'}{kT} & \left\{ \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) \left( \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial \rho} \varepsilon - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right) + \right. \\ & \left. + \operatorname{div} \mathbf{v}_n \left[ \frac{1}{T} \left( \frac{\partial T}{\partial \rho} \rho + \frac{\partial T}{\partial S} S \right) \varepsilon - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \rho \right] + \frac{S T}{\rho_n} \mathbf{p} \frac{\nabla T}{T} \right\}. \end{aligned} \quad (38.5)$$

\*) Штрихом обозначаем дифференцирование функции по аргументу  $n' = -n(1+n)$ .

Далее вычисляем скобку Пуассона в левой части кинетического уравнения:

$$\frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} = \frac{n'}{kT} \left\{ -\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \nabla (\mathbf{p} \mathbf{v}_n) - \frac{\nabla T}{T} \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \right\}. \quad (38.6)$$

Собрав все члены (38.5) и (38.6), получаем кинетическое уравнение в интересующем нас приближении:

$$\begin{aligned} \frac{n'}{kT} \left\{ \left( \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{p}} \varepsilon - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \right) \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \right. \\ \left. + \left[ \frac{1}{T} \left( \frac{\partial T}{\partial \mathbf{p}} \rho + \frac{\partial T}{\partial S} S \right) \varepsilon - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \right] \operatorname{div} \mathbf{v}_n + \right. \\ \left. - \frac{\nabla T}{T} \left( \mathbf{p} \frac{ST}{\rho_n} - \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \right) - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \nabla (\mathbf{p} \mathbf{v}_n) \right\} = I(n_1). \quad (38.7) \end{aligned}$$

Для дальнейшего удобно выделить из последнего члена в фигурной скобке  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \nabla (\mathbf{p} \mathbf{v}_n)$  члены вида  $\operatorname{div} \mathbf{v}_n$ , а остальную часть симметризовать, после чего окончательно получаем

$$\begin{aligned} \frac{n'}{kT} \left\{ \left( \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{p}} \varepsilon - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \right) \operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n) + \right. \\ \left. + \left[ \frac{1}{T} \left( \frac{\partial T}{\partial \mathbf{p}} \rho + \frac{\partial T}{\partial S} S \right) \varepsilon - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} - \frac{1}{3} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p} \right] \operatorname{div} \mathbf{v}_n + \right. \\ \left. + \frac{\nabla T}{T} \left( \mathbf{p} \frac{ST}{\rho_n} - \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}_i} p_k - \frac{1}{3} \delta_{ik} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{p} \right) \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{\partial v_{ni}}{\partial r_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial r_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \operatorname{div} \mathbf{v}_n \right) \right\} = I(n_1). \quad (38.8) \end{aligned}$$

Анализ уравнения (38.8) показывает, что в полном соответствии с § 18 члены, содержащие  $\operatorname{div} (\mathbf{j} - \rho \mathbf{v}_n)$  и  $\operatorname{div} \mathbf{v}_n$ , определяют вторую вязкость в сверхтекучей жидкости (всего три коэффициента), член с градиентом температуры  $\nabla T$  — теплопроводность и, наконец, последний член — первую вязкость. Вычисление соответствующих кинетических коэффициентов мы произведем ниже, используя общее уравнение (38.8)

### § 39. Теплопроводность [16]

При наличии градиента температуры в сверхтекучем гелии возникает макроскопическое движение жидкости, характер которого определяется уравнениями движения. Макроскопическое движение нормальной части жидкости сопровождается обратимым переносом тепла. Однако, кроме макроскопического потока тепла, согласно проведенному в § 18 анализу, при этом имеет место некоторый необратимый поток тепла

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T, \quad (39.1)$$

величина которого существенно определяется коэффициентом теплопроводности  $\kappa$ . Для вычисления коэффициента теплопроводности необходимо решить кинетическое уравнение, которое при наличии градиента температуры согласно (38.8) имеет следующий вид:

$$\frac{n'}{kT^2} \nabla T \left( \mathbf{p} \frac{ST}{\rho_n} - \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} \right) = I(n_1). \quad (39.2)$$

Рассматриваемое явление теплопроводности имеет много общего с теплопроводностью классической жидкости. Однако имеются и специфические особенности, связанные с тем, что в данном случае эффект связан с возбуждениями и их необычным характером энергетического спектра. Так, для чисто фонового газа левая часть уравнения (39.2) тождественно равна нулю и, следовательно, соответствующий коэффициент теплопроводности должен был бы быть равным нулю.

Дальнейшие вычисления произведем, разбив поток (39.1) на две части, обязанные соответственно ротонам и фононам. Коэффициент теплопроводности  $\kappa$  при этом складывается также из двух частей — ротонной ( $\kappa_r$ ) и фононной ( $\kappa_{ph}$ ):

$$\kappa = \kappa_r + \kappa_{ph}.$$

Ротонная часть коэффициента теплопроводности. Ротонная часть коэффициента теплопроводности  $\kappa_r$  определяется в основном процессами рассеяния ротонов ротонами. Взаимодействие ротонов с фононами оказывается несущественным в области относительно более высоких температур (выше 0,9° K). При более



же низких температурах это взаимодействие начинает играть существенную роль. Однако поскольку основной вклад в теплопроводность в этой области температур вносят, как будет видно, фононы, то соответствующим ротоным эффектом можно просто пренебречь. Вычисление  $\kappa_r$  мы производим лишь по порядку величины и выясняем при этом температурную зависимость этого коэффициента. Более точные вычисления не имеют смысла, поскольку характер взаимодействия ротонов друг с другом неизвестен (см. § 15). В таком случае можно также упростить задачу, заменив интеграл столкновений на величину

$$I(n) \rightarrow -\frac{n-n_0}{t_r}, \quad (39.3)$$

где  $t_r$  есть некоторое характерное время, которое мы в дальнейшем отождествим со временем соударения ротонов, определенным формулой (15.7). Подставив выражение (39.3) в правую часть (39.2) и решив уравнение относительно  $n - n_0$ , получим

$$n - n_0 = -\frac{n'}{kT^2} \nabla T \left( p \frac{ST}{\rho_n} - \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right) t_r. \quad (39.4)$$

Далее, вычисляем поток энергии:

$$q = \int \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \varepsilon (n - n_0) d\tau_p. \quad (39.5)$$

Сравнив (39.5) с (39.1), находим выражение для коэффициента теплопроводности:

$$\kappa_r = t_r \frac{1}{3kT^2} \int n' \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \left( p \frac{ST}{\rho_n} - \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right) d\tau_p. \quad (39.6)$$

Вычисление интеграла (39.6) с функцией распределения для ротонов вида (2.12) дает следующий результат:

$$\kappa_r = \frac{\Delta^2 t_r N_r}{3\mu T} \left( 1 - \frac{3SS_r T^2 \mu}{\rho_n N_r} \right). \quad (39.7)$$

Второй член в скобке в формуле (39.7) практически всегда мал, и им можно пренебречь. Подставив в (39.7)

выражение (15.7) для  $t_r$ , окончательно получаем

$$\kappa_r = \frac{\Delta^2 \hbar^4}{6\rho_0 \mu^2 |V_0|^2} \frac{1}{T}. \quad (39.8)$$

Таким образом, ротоновая часть коэффициента теплопроводности медленно растет с понижением температуры как обратная степень  $T$ .

Фононная часть коэффициента теплопроводности. При рассмотрении фононного вклада в теплопроводность самым существенным оказывается процесс рассеяния фононов ротонами.

При решении кинетического уравнения большие упрощения возникают благодаря тому, что установление равновесия по энергиям в фононном газе происходит быстрее указанных выше процессов. Установление энергетического равновесия осуществляется при рассеянии фононов друг другом на малые углы; соответствующие времена были вычислены в § 13. Такой процесс не дает вклада в явления переноса (теплопроводность, вязкость), однако обеспечивает установление энергетического равновесия для фононов с заданным направлением импульса. Это позволяет для описания фононов пользоваться равновесными функциями, характеризуя фононы, движущиеся в каждом данном направлении, своей температурой.

Второе обстоятельство, которое следует иметь в виду, связано с процессом установления равновесия по числу фононов, который осуществляется пятифононным механизмом. Пятифононный процесс (2 фонона  $\rightleftharpoons$  3 фонона), как мы видели, также происходит без изменения направления сталкивающихся фононов. При  $T > 1,2^\circ \text{ K}$  времена, характеризующие этот процесс, сравнимы с временами, характеризующими рассеяние фонона ротоном. При  $T < 1,2^\circ \text{ K}$  благодаря быстрому выходу из игры ротонов процесс установления равновесия по числу фононов оказывается более быстрым, чем рассеяние фононов. В связи с этим вторым обстоятельством функция распределения для фононов заданного направления содержит некоторый химический потенциал (функцию направления; ниже  $1,2^\circ \text{ K}$  эту функцию можно считать равной нулю). Таким образом, функция распределения фононов, движущихся

в заданном направлении, может быть представлена в виде

$$n = \left[ \exp \left( \alpha' + \frac{pc}{kT'} \right) - 1 \right]^{-1}, \quad (39.9)$$

где  $\alpha'$  — некоторая функция направления — аналог химического потенциала, а  $T'$  — температуры. Отклонение функции распределения от равновесного значения согласно (39.9) равно

$$n - n_0 = -n_0(n_0 + 1) \left\{ \alpha' - \frac{pc}{kT} \frac{T' - T}{T} \right\} \quad (39.10)$$

( $T$  — равновесная температура фононного газа). Выберем ось  $z$  по направлению  $\Delta T$ ; тогда левая часть кинетического уравнения (39.2) содержит в виде множителя  $\cos \vartheta$ , где  $\vartheta$  — угол между импульсом фонона и осью. Поскольку уравнение (39.9) — линейное, угловая зависимость функций  $\alpha'$  и  $\frac{T' - T}{T}$  очевидна:

$$\alpha' = \alpha \cos \vartheta, \quad \frac{T' - T}{T} = \beta \cos \vartheta. \quad (39.11)$$

Интеграл столкновений в правой части уравнения (39.2) складывается из четырех частей, обязанных соответственно рассеянию:  $I_{phr}$  — фононов ротонами,  $I_{ph}$  — фононов фононами,  $I'_{ph}$  — фононов фононами на малые углы и  $I_{2 \rightarrow 3}$  — двух фононов, сопровождаемому рождением третьего (пятифононный процесс). Проинтегрируем уравнение (39.2) слева и справа по всем фононам и по всем энергиям фононов ( $\int I p^2 dp$  и  $\int I \varepsilon p^2 dp$ ). При этом согласно сказанному выше интегралы

$$\int I'_{ph} p^2 dp, \quad \int I_{ph} \varepsilon p^2 dp, \quad \int I_{2 \rightarrow 3} \varepsilon p^2 dp$$

равны нулю.

Что касается интеграла  $I_{ph}$ , то, как можно показать, он тождественно равен нулю. Это очевидно из физических соображений, поскольку при соударениях фононов импульс сохраняется, и поэтому не может возникать поток.

Далее согласно (16.4) имеем

$$\frac{1}{kT} \int I_{2 \rightarrow 3} d\tau_p = \alpha \Gamma_{ph}. \quad (39.12)$$

Вычисление интеграла  $I_{phr}$  производится несложным образом с использованием формулы (14.7) для дифференциального эффективного сечения рассеяния фонона ротоном:

$$I_{phr} = \cos \vartheta N_r c \int d\sigma(p, \psi) (1 - \cos \psi) \left( \alpha - \beta \frac{pc}{kT} \right) n_0 (n_0 + 1).$$

Отсюда после интегрирования по телесному углу  $d\Omega$  получаем

$$I_{phr} = n_0 (n_0 + 1) \left( \alpha - \beta \frac{pc}{kT} \right) \cos \vartheta \frac{1}{\theta} \left( \frac{pc}{2\pi kT} \right)^4, \quad (39.13)$$

где  $\theta$  — величина, имеющая размерность времени и характеризующая рассеяние фонона ротоном:

$$\frac{1}{\theta} = \frac{N_r}{4\pi c} \left[ \frac{p_0 (2\pi kT/c^2)}{\hbar^2 p} \right]^2 \left\{ \frac{4}{45} + \frac{1}{25} \left( \frac{p_0}{\mu c} \right)^2 + \frac{2}{9} \frac{p_0}{\mu c} A + A^2 \right\}. \quad (39.14)$$

Воспользуемся формулами (39.10) — (39.13) после усреднения по всем фононам и по всем энергиям фононов (при заданном направлении  $\vartheta$ ); получим из кинетического уравнения два уравнения, определяющих величину  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x} \left( c - \frac{ST}{\rho_n c} \right) &= \frac{1}{\theta} \left( \frac{\alpha}{8} - \beta \right), \\ \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x} \left( c - \frac{ST}{\rho_n c} \right) &= \frac{\pi^4}{216} \frac{1}{\theta} \left( \frac{\alpha}{7} - \beta \right) + \frac{1}{\tau_{2 \rightarrow 3}} \alpha; \end{aligned} \right\} \quad (39.15)$$

здесь  $\tau_{2 \rightarrow 3}$  есть время, характеризующее пятифононный процесс:

$$\frac{1}{\tau_{2 \rightarrow 3}} = \frac{1}{3N_{ph}} kT \Gamma_{ph}. \quad (39.16)$$

Зная величины  $\alpha$  и  $\beta$ , а тем самым согласно (39.10) и неравновесную часть функции распределения, мы без труда можем вычислить поток энергии и, следовательно, величину фононной части коэффициента теплопроводности.

Заметим, однако, что в полученном виде решение кинетического уравнения (39.10) не удовлетворяет условию  $\int p (n - n_0) d\tau = 0$ . В действительности поэтому при

наличии градиента температуры в гелии возникает некоторое макроскопическое движение жидкости с относительной скоростью  $v_n - v_s$  такой, что  $\int p (n - n_0) d\tau + \rho_n (v_n - v_s) = 0$ . Поэтому равновесные функции распределения фононов и ротонов будут зависеть не просто от энергии  $\epsilon$ , а от комбинации  $\epsilon - (p, v_n - v_s)$ . Разлагая равновесные функции в ряд по  $v_n - v_s$ , получим добавки  $-\frac{\partial n}{\partial \epsilon} (p, v_n - v_s)$ , где  $v_n - v_s$  находится из предыдущего условия. Таким образом, полная добавка к функции распределения фононов равна

$$\delta n = (n - n_0) + \frac{\partial n}{\partial \epsilon} \frac{1}{\rho_n} p \int (n - n_0) p' d\tau',$$

где разность  $n - n_0$  определяется формулой (39.10).

Аналогичным образом для функции распределения ротонов имеем добавку

$$\delta N = \frac{\partial N}{\partial E} \frac{1}{\rho_n} p \int (n - n_0) p' d\tau'.$$

Это обстоятельство приводит к следующему выражению для потока энергии, обязанного фононам (и ротонам):

$$Q = \int \delta n \epsilon \frac{\partial \epsilon}{\partial p} d\tau + \int \delta N \cdot E \frac{\partial E}{\partial p} d\tau = \left(1 - \frac{ST}{\rho_n^2 c^2}\right) \int (n - n_0) \epsilon \frac{\partial \epsilon}{\partial p} d\tau.$$

Отсюда после несложных вычислений получаем окончательный результат:

$$\left. \begin{aligned} \kappa_{ph} &= \frac{1}{3} C_{ph} \cdot c^2 \tilde{\theta}_{phr} \left(1 - \frac{TS}{\rho_n c^2}\right)^2, \\ \tilde{\theta}_{phr} &= \theta \left(1 + \frac{\frac{\pi^4}{27} \left(\frac{27}{\pi^4} - \frac{1}{8}\right)^2}{\frac{\pi^4}{246.56} + \frac{\theta}{\tau_{3 \rightarrow 2}}}\right). \end{aligned} \right\} \quad (39.17)$$

Время  $\theta$  благодаря экспоненциальной зависимости от температуры числа ротонов  $N_r$  быстро возрастает с убыванием температуры, таким образом,  $\kappa_{ph}$  в основном изменяется

с температурой по закону  $e^{\Delta/kT}$ , причем ниже  $1,4^\circ \text{ K}$  фононная часть коэффициента теплопроводности  $\kappa_{ph}$  уже заметно превосходит ротонную часть ( $\kappa_r$ ). При температурах ниже  $1,2^\circ \text{ K}$ , как указывалось,  $\theta \gg \tau_{2 \rightarrow 3}$ , и последняя скобка в (39.17) может быть заменена на единицу.

## § 40. Первая вязкость [10]

Задача о вычислении коэффициента первой вязкости очень сходна с рассмотренной выше задачей о теплопроводности. Рассмотрим сверхтекучий гелий, в котором нормальная скорость  $v_n$  является функцией координат.

Кинетическое уравнение для задачи о вязкости согласно (38.8) имеет следующий вид:

$$-\frac{n'}{kT} \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial p_i} p_k - \frac{1}{3} \delta_{ik} \frac{\partial \epsilon}{\partial p} p \right) \times \\ \times \left( \frac{\partial v_{ni}}{\partial r_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial r_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_{nl}}{\partial r_l} \right) = I(n). \quad (40.1)$$

Для нахождения коэффициента вязкости необходимо вычислить возникающий поток импульса, который мы разобьем на две части — ротонную и фононную.

Для вычисления ротонной части коэффициента вязкости  $\eta_r$  заменяем  $I(n)$  на (ср. с § 39)

$$-\frac{n - n_0}{t_r}. \quad (40.2)$$

Стоящее здесь время  $t_r$ , вообще говоря, не совпадает со временем  $t_r$ , использованным в § 39 для вычисления ротонной части коэффициента теплопроводности. Лишь при условии, что вероятность рассеяния ротона ротоном имеет острый максимум при рассеянии на малые углы, оба времени совпали бы. Поскольку, однако, нас будет интересовать лишь температурная зависимость  $\eta_r$ , приближение (40.2) является достаточным. Подставив (40.2) в (40.1) вместо  $I(n)$ , найдем здесь  $n - n_0$  и вычислим тензор потока импульса; получаем:

$$\pi_{lm} = \int \frac{\partial \epsilon}{\partial p_i} p_m (n - n_0) d\tau_p = -\frac{t_r}{15kT} \int n' \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial p} \right)^2 p^2 d\tau_p \times \\ \times \left( \frac{\partial v_{nl}}{\partial r_m} + \frac{\partial v_{nm}}{\partial r_l} - \frac{2}{3} \delta_{lm} \text{div } v_n \right). \quad (40.3)$$

Выполнив необходимое интегрирование в (40.3), находим ротонную часть коэффициента вязкости:

$$\eta_r = \frac{p_0^2 t_r N_r}{15\mu} = \frac{\hbar^4 p_0}{30\mu^2 |V_0|^2}. \quad (40.4)$$

Выражение (40.4) содержит только не зависящие от температуры величины, поэтому  $\eta_r$  является константой.

Вычисление фононной части коэффициента вязкости  $\eta_{ph}$  производится совершенно аналогично вычислению фононной части коэффициента теплопроводности. Отличие состоит лишь в двух пунктах. Во-первых, благодаря другой симметрии задачи величины  $\alpha'$  и  $(T' - T)/T$  (формула (39.10)) ищем в виде

$$\alpha' = \alpha P_2(\cos \vartheta), \quad \frac{T' - T}{T} = \beta P_2(\cos \vartheta). \quad (40.5)$$

Во-вторых, рассеяние фононов фононами на большие углы дает вклад при температурах ниже  $0,9^\circ \text{K}$  (интеграл  $I_{ph}$  не равен нулю).

Не останавливаясь на подробных вычислениях, приведем окончательный результат

$$\eta_{ph} \approx \frac{1}{5} c^2 \rho_{nph} \bar{\theta} \begin{cases} \left( 1 + \frac{\frac{\pi^4}{27} \left( \frac{27}{\pi^4} - \frac{1}{8} \right)}{\frac{\pi^4}{56 \cdot 216} + \frac{\bar{\theta}}{\tau_{2 \rightarrow 3}}} \right) & T > 0,9^\circ \text{K}, \\ \frac{1}{1 + \bar{\theta}/\tau_{ph}} & T < 0,9^\circ \text{K}. \end{cases} \quad (40.6)$$

Время  $\bar{\theta}$  несколько отличается от  $\theta$  (формула (39.14)):

$$\frac{1}{\bar{\theta}} = \frac{N_r}{4\pi r} \left[ \frac{p_0 (2\pi k T/c)^2}{\hbar^2 \rho} \right] \times \\ \times \left\{ \frac{2}{15} + \frac{33}{35^2} \left( \frac{p_0}{\mu c} \right)^2 + \frac{4A}{75} \left( \frac{p_0}{\mu c} \right) + A^2 \right\} \quad (40.7)$$

и, наконец, время  $\tau_{ph}$ , характеризующее четырехфононный процесс, равно

$$\frac{1}{\tau_{ph}} = \frac{9 \cdot 13! (u+1)^4}{2^{18} (2\pi)^7 \hbar^2 \rho^2 c} \left( \frac{kT}{c} \right)^9, \quad u = \frac{\rho}{c} \frac{\partial c}{\partial \rho}. \quad (40.8)$$

Численный анализ формулы (40.6) дает следующий результат; фононная часть коэффициента вязкости возрастает с убыванием температуры по экспоненциальному закону  $e^{A/kT}$ ; при температурах ниже  $0,7^\circ \text{K}$ , когда существенным является только эффект рассеяния фононов фононами, этот закон заменяется законом  $T^{-5}$ . При температурах ниже  $1,4^\circ \text{K}$  постоянный вклад ротонной вязкости пренебрежимо мал по сравнению с фононным.

К вопросу о кинетических коэффициентах мы вернемся еще раз в следующем пункте при рассмотрении явления дисперсии звука.

## ГЛАВА XI

## ДИСПЕРСИЯ И ПОГЛОЩЕНИЕ ЗВУКА [27, 28]

## § 41. Медленные процессы установления равновесия в газе возбуждений

Благодаря взаимодействию элементарных возбуждений (фоонов и ротон) возникает ряд механизмов для диссипации энергии, приводящих к поглощению звука и к появлению зависимости скорости звука от его частоты.

При малых частотах ( $\omega\tau \ll 1$ ,  $\omega$  — частота звука, а  $\tau$  — некоторые характерные времена) исследование вопроса о поглощении звука производится с помощью гидродинамических уравнений сверхтекучей жидкости с диссипативными членами. Эксперименты по поглощению первого звука в жидком гелии указывают на то, что коэффициент второй вязкости  $\zeta_2$  в отличие от обычных жидкостей, где он по порядку величины равен  $\eta$ , примерно на полтора порядка превосходит  $\eta$ . Этот факт является прямым указанием на то, что в газе возбуждений происходят медленные процессы установления равновесия. Основной механизм рассеяния возбуждений, определяющий вязкость и теплопроводность, — это рассеяние фоонов ротонами. Что же касается медленных процессов приближения к равновесию, то в § 16 рассматривались два таких процесса: процесс превращения двух фоонов в три (пятифононный процесс) и процесс превращения энергичного фоона в ротон. Первый из этих процессов обеспечивает установление равновесия по числу фоонов.

Вопрос о распространении звука в сверхтекучей жидкости при больших частотах ( $\omega\tau \sim 1$ ), очевидно, не может быть рассмотрен в гидродинамическом приближении и может быть решен лишь на основе кинетического уравне-

ния. Этому вопросу и посвящается настоящая глава. При этом вследствие очень благоприятной ситуации с установлением равновесия по энергиям в газе возбуждений задачу удастся по существу решить точно. Дело в том, что эффективное сечение рассеяния ротон ротонами довольно велико, и поэтому практически в ротонном газе всегда имеется локальное равновесие.

Рассеяние фоона фооном для столкновений фоонов под малыми углами не сопровождается изменением направлений импульсов сталкивающихся фоонов и аномально велико. Этот процесс быстрее всех других процессов, происходящих с фоонами, и приводит к тому, что для фоонов, движущихся в заданном направлении, всегда имеется энергетическое равновесие. Кроме того, как мы увидим, пятифононный процесс для фоонов, сталкивающихся под малыми углами, происходит также быстрее процесса рассеяния фоонов ротонами, и поэтому равновесие по числу фоонов успевает устанавливаться. Таким образом, относительно самым медленным процессом является рассеяние фоонов ротонами. Медленность этого процесса приводит к тому, что установление энергетического равновесия между фоонным и ротонным газами затруднено, в то время как в каждом из них в отдельности оно имеется. Это обстоятельство приводит к возникновению в гидродинамическом приближении некоторой второй вязкости, а в общем случае к поглощению и дисперсии первого и второго звуков. При этом теория содержит только одно характерное время  $\tau_{phr}$ , связанное с рассеянием фоона ротон, которое может быть точно вычислено. Полученные результаты, естественно, будут справедливы для всех частот ( $\omega\tau_{phr} \gtrsim 1$ ), лишь бы частоты не превосходили обратной величины характерных времен установления равновесия в газе возбуждений.

На рис. 7 изображена температурная зависимость времен, характеризующих различные фоонные процессы. При сравнении времен  $\tau_{phr}$  и  $\tau_{3 \rightarrow 2}$ , характеризующих процессы рассеяния фоона ротон и превращения трех фоонов в два, следует учесть, что эти процессы рассеяния в кинетическое уравнение, как мы увидим ниже, входят с разным весом, поскольку при рассеянии фоонов ротонами играют роль более энергичные фооны, чем при пяти-

фононном процессе. В связи с этим на рис. 7 изображен график величины  $\frac{7 \cdot 216}{\pi^4} \frac{1}{\tau_{3 \rightarrow 2}}$ , которую следует сравнить с величиной  $\frac{1}{\tau_{phr}}$ .

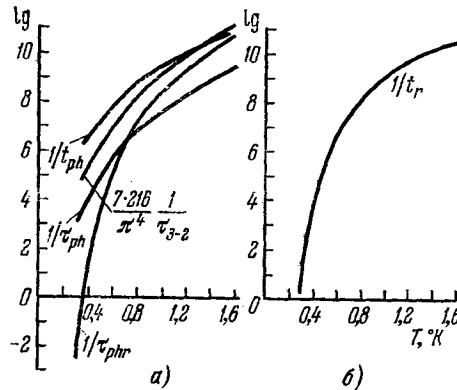


Рис. 7.

Из рисунка видно, что в области температур ниже 1,2° К, которой мы больше всего будем интересоваться, четырехфононный и пятифононный процессы обеспечивают быстрое установление равновесия как по энергиям, так и по числу фононов для фононов, движущихся в заданном направлении. Поэтому фононы, движущиеся в заданном направлении, можно характеризовать некоторой температурой  $T_{ph}$  (функцией направления импульса фонона). При температурах выше 1,2° К время, характеризующее пятифононный процесс, становится сравнимым с временем  $\tau_{phr}$ , и установление равновесия по числу фононов не будет столь быстрым. В этом случае функция распределения фононов, движущихся в заданном направлении, зависит также от некоторого химического потенциала  $\alpha$ . Таким образом, функция распределения фононов есть некоторая квазиравновесная функция

$$n = \left( e^{\frac{\epsilon}{kT_{ph}} + \alpha} - 1 \right)^{-1}, \quad (41.1)$$

в которой температура  $T_{ph}$  и химический потенциал  $\alpha$  зависят от направления импульса фонона. При температурах ниже 1,2° К согласно сказанному  $\alpha$  можно положить равным нулю\*), и отклонение функции распределения  $n$  от постоянного равновесного значения  $n_0$  (для малых отклонений) представится в виде

$$n - n_0 = \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial p} \rho' + \epsilon v \right). \quad (41.2)$$

Первое слагаемое отражает зависимость энергетического спектра от плотности, второе получается разложением  $T_{ph}$  в ряд по разности  $T_{ph} - T_0$  ( $T_0$  — постоянная равновесная температура),  $v$  есть некоторая функция направления импульса фонона, которая будет найдена в результате решения кинетического уравнения. Вообще говоря, функция  $n$  зависит не от  $\epsilon$ , а от разности  $\epsilon - (p, v_{nph} - v_s)$ , где  $v_{nph} - v_s$  — некоторая относительная скорость фононного газа, являющаяся также функцией направления импульса фонона. Можно видеть, однако, что поскольку  $\epsilon$  — линейная функция от  $p$ , то функция  $v$  в формуле (41.2) автоматически учитывает и наличие такого члена.

Перейдем теперь к ротонам, формула (15.7) определяет температурную зависимость времени  $t_r$ , характеризующего рассеяние ротонов ротонами (рис. 7, б). Сравнение  $t_r$  с временем рассеяния ротонов фононами показывает, что при температурах выше 0,6° К рассеяние ротонов ротонами происходит более быстро, что обеспечивает установление некоторого локального равновесия в ротонном газе. Таким образом, ротонны могут быть описаны некоторой квазиравновесной функцией распределения с температурой  $T_r$  и относительной скоростью  $v_{nr} - v_s$ , являющимися функцией точки

$$N = \exp \left[ - \frac{\epsilon - (p, v_{nr} - v_s)}{kT_r} \right]. \quad (41.3)$$

Разлагая эту функцию в ряд по отклонениям всех величин от их равновесных значений, получаем (для малых

\*) Учет  $\alpha$  будет произведен в § 45.

отклонений)

$$N - N_0 = \frac{\partial N}{\partial \mathcal{E}} \left[ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p} p' - \mathcal{E} \frac{T_r'}{T_0} - (P, v_{nr} - v_s) \right]. \quad (41.4)$$

Здесь  $T_r'$  — отклонение температуры ротонного газа от равновесного значения,  $T_0$ ,  $N_0$  — постоянная равновесная функция распределения.

Заметим, что для общности следовало бы в квадратной скобке в выражении для добавки к функции распределения ротонов написать член, соответствующий некоторому химическому потенциалу  $\alpha_r$ . Однако поскольку спектр ротона таков, что его энергия почти постоянна и равна  $\Delta$ , такой член по своей зависимости от импульса и энергии невозможно отличить от члена  $\mathcal{E} \frac{T_r'}{T_0} \approx \Delta \frac{T_r'}{T_0}$ . Это обстоятельство позволяет нам с самого начала объединить оба указанных члена. Физический смысл этого обстоятельства также прост. Всякое локальное изменение числа ротонов можно описать локальным изменением температуры.

Остановимся на вопросе о границах применимости получаемых результатов по частотам звука. Очевидно, что для всего производимого рассмотрения существенны два обстоятельства. Во-первых, наличие энергетического равновесия для фононов, движущихся в заданном направлении, во-вторых, наличие локального равновесия в ротонном газе. Поэтому для того чтобы эти обстоятельства не нарушались, очевидно, необходимо выполнение двух условий

$$\omega t_r \ll 1 \quad \text{и} \quad \omega t_{ph} \ll 1,$$

где время  $t_r$  определяется формулой (15.7), а время  $t_{ph}$  — формулой (13.16). При оценке  $t_{ph}$  необходимо подставить энергию фононов, играющую главную роль в интеграле столкновений и существенную для явления дисперсии звука (как мы увидим, это  $\varepsilon \approx 7-8 kT_0$ ).

При этом следует иметь в виду, что истинная величина времени  $t_{ph}$ , как уже указывалось выше, гораздо меньше той, которая определяется по формуле (13.15) со значением  $\gamma$  (12.3).

Существенная дисперсия для первого звука появляется, когда  $\omega t_{ph} \sim 1$ , а для второго звука, когда  $\omega t_{ph} \sim u_2/u_1$ . Поскольку  $u_2/u_1 \lesssim 1$ , то дисперсия второго звука наступает при более низких частотах, чем для первого звука. Легко видеть, что в том и в другом случаях дисперсия наступает, когда длина волны соответствующего звука сравнивается с длиной свободного пробега фононов.

Из рис. 7, а и б видно, что существует большая область частот, для которых возможно наблюдение дисперсии звука.

## § 42. Кинетические уравнения

Как уже указывалось выше, в общем случае произвольной величины параметра  $\omega t$  длины свободного пробега фононов и ротонов могут оказаться сравнимыми и даже превосходить длину волны звука. Поэтому к нормальной части жидкости нельзя применять гидродинамические уравнения, а следует использовать кинетические уравнения для функций распределения фононов  $n(p, r, t)$  и ротонов  $N(P, r, t)$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial r} \frac{\partial H_{ph}}{\partial p} - \frac{\partial n}{\partial p} \frac{\partial H_{ph}}{\partial r} = I(n), \quad (42.1)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial r} \frac{\partial H_r}{\partial P} - \frac{\partial N}{\partial P} \frac{\partial H_r}{\partial r} = I(N), \quad (42.2)$$

$I(n)$  и  $I(N)$  — интегралы столкновений, обязанные процессам упругого и неупругого рассеяния фононов и ротонов. Гамильтонианы  $H_{ph}$  и  $H_r$  равны

$$H_{ph} = \varepsilon(p) + (p, v_s), \quad H_r = \mathcal{E}(P) + (P, v_s),$$

где  $\varepsilon(p)$  и  $\mathcal{E}(P)$  — зависящие от плотности жидкости  $\rho$  энергии фононов и ротонов в движущейся со скоростью  $v_s$  системе отсчета.

Величины  $\rho$  и  $v_s$  играют роль внешних условий для газа возмущений.

Для того чтобы получить полную систему уравнений, необходимо к (42.1) и (42.2) добавить уравнение непрерыв-

ности массы и уравнение сверхтекучего движения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}_s + \int \mathbf{p} n d\tau_p + \int \mathbf{P} N d\tau_P) = 0, \quad (42.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \nabla \left( \mu + \int \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} n d\tau_p + \int \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial P} N d\tau_P \right) = 0, \quad (42.4)$$

где  $\mu_0$  — химический потенциал при  $T = 0$ .

В плоской звуковой волне все термодинамические величины складываются из постоянных равновесных слагаемых и небольших добавок, изменяющихся по закону  $e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$  ( $\mathbf{k}$  — волновой вектор). Скорости  $\mathbf{v}_s$ ,  $\mathbf{v}_{nph}$  и  $\mathbf{v}_{nr}$  в звуковой волне являются также малыми величинами \*), изменяющимися по этому же закону. Поэтому в уравнениях (42.1), (42.2), (42.3) и (42.4) можно положить  $n = n_0 + n'$ ,  $N = N_0 + N'$ ,  $\rho = \rho_0 + \rho'$ , где  $n_0$ ,  $N_0$ ,  $\rho_0$  — постоянные равновесные значения,  $n'$ ,  $N'$ ,  $\rho'$ , а также  $\mathbf{v}_s$  — малые добавки, пропорциональные  $e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)}$ . После линеаризации указанные уравнения приобретают вид

$$\left(1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{\omega}\right) n' + \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v})}{\omega} \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \rho' + (\mathbf{p}\mathbf{v}_s)\right) = -\frac{1}{i\omega} I(n), \quad (42.5)$$

$$\left(1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{V}}{\omega}\right) N' + \frac{(\mathbf{k}\mathbf{V})}{\omega} \frac{\partial N_0}{\partial \mathcal{E}} \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial P} \rho' + (\mathbf{P}\mathbf{v}_s)\right) = -\frac{1}{i\omega} I(N), \quad (42.6)$$

$$-\omega \rho' + \mathbf{k}\rho \mathbf{v}_s + \int (\mathbf{k}\mathbf{p}) n' d\tau_p + \int (\mathbf{k}\mathbf{P}) N' d\tau_P = 0, \quad (42.7)$$

$$-\omega \mathbf{v}_s + \mathbf{k} \left( \frac{c^2}{\rho} + \int \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho^2} n_0 d\tau_P + \int \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial P^2} N_0 d\tau_P \right) \rho' + \mathbf{k} \int \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} n' d\tau_p + \mathbf{k} \int \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial P} N' d\tau_P = 0, \quad (42.8)$$

где  $\mathbf{v} = \partial \varepsilon / \partial \mathbf{p}$ , а  $\mathbf{V} = \partial \mathcal{E} / \partial \mathbf{P}$ . Мы опустили индекс нуль у плотности и температуры \*\*) и использовали тот факт, что  $d\mu_0 = c^2 \cdot d\rho / \rho$ .

Введем сферическую систему координат с полярной осью вдоль вектора  $\mathbf{k}$ . Угол между  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{p}$  обозначим  $\theta$ , а угол между  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{P}$  —  $\Phi$ . В этой системе координат  $n'$  и

\*) Имеется в виду малость скоростей  $\mathbf{v}_s$ ,  $\mathbf{v}_{nph}$  и  $\mathbf{v}_{nr}$  по сравнению со скоростями первого и второго звуков.

\*\*) В дальнейшем мы всюду будем опускать индекс нуль у равновесных термодинамических величин.

$N'$  согласно (41.2), (41.4) равны

$$n' = \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \rho' + \varepsilon_T (\cos \theta) \right), \quad (42.9)$$

$$N' = \frac{\partial N_0}{\partial \mathcal{E}} \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial P} \rho' - \mathcal{E} \frac{T'_r}{T} - P w_r \cos \Phi \right). \quad (42.10)$$

Неизвестную функцию  $\nu(\cos \theta)$  будем искать в виде

$$\nu(\cos \theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \nu_i P_i(\cos \theta) \quad (P_i(\cos \theta) — \text{полиномы Лежандра}).$$

Подставим (42.9) и (42.10) в уравнения (42.7) и (42.8) и проинтегрируем по всем  $\mathbf{p}$ - и  $\mathbf{P}$ -пространствам:

$$-\tilde{\omega} \rho' + \left( \mathbf{v}_s + \frac{\rho_n}{\rho} \mathbf{w}_r \right) - \frac{\rho_{nph}}{\rho} (\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_r) = 0, \quad (42.11)$$

$$-\tilde{\omega} \mathbf{v}_s + \frac{\rho}{c^2} \left( \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_T \rho' + \frac{T}{c^2} \left( \frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_\rho T'_r - 3u \frac{\rho_{nph}}{\rho} (\mathbf{v}_0 + T'_r) = 0. \quad (42.12)$$

Здесь  $\rho_{nph}$  — фоновая часть нормальной плотности,  $\mu$  — химический потенциал, а  $\mathbf{v}_0$  и  $\mathbf{v}_1$  — коэффициенты при нулевой и первой гармониках в разложении  $\nu(\cos \theta)$  по полиномам Лежандра. В уравнениях (42.11) и (42.12) мы ввели обозначение  $\tilde{\omega} = \omega / kc$  и перешли к безразмерным переменным \*).

Интеграл столкновений  $I(n)$  в правой части уравнения (42.1) состоит из четырех слагаемых:  $I_{phr}(n)$ , обязанного рассеянию фононов ротонами,  $I_{ph}(n)$ , обязанного рассеянию фононов фононами,  $I'_{ph}(n)$ , обязанного специфическому процессу рассеяния фононов фононами на малые углы и, наконец,  $I_{3 \rightarrow 2}(n)$ , характеризующего изменение числа фононов, происходящее благодаря пятифононному процессу.

Полная энергия фононов, движущихся в заданном направлении, при пятифононном процессе и при рассеянии фононов фононами на малые углы сохраняется. Прин-

\*) В §§ 42—46 мы будем обозначать через  $\rho'$  и  $T'_r$  отношения отклонений плотности жидкости и температуры ротоного газа соответственно к  $\rho_0$  и  $T_0$ , а через  $\mathbf{v}_s$  и  $\mathbf{w}_r$  — отношения скорости сверхтекучей части жидкости и относительной скорости ротоного газа к  $c$ .



тегрируем с учетом (42.9) левую и правую части уравнения (42.1) по всем возможным энергиям и разделим на  $\int \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \varepsilon^2 p^2 dp$ . Согласно сказанному интегралы  $\int I_{ph}(n) \varepsilon d\tau_p$  и  $\int I_{3 \rightarrow 2}(n) \varepsilon d\tau_p$  равны нулю и мы имеем

$$(\tilde{\omega} - \cos \theta) \nu (\cos \theta) + \tilde{\omega} \rho' + \cos^2 \theta \nu_s =$$

$$= -\frac{\tilde{\omega}}{i\omega} \left( \frac{\int I_{phr}(n) \varepsilon p^2 dp}{\int \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \varepsilon^2 p^2 dp} + \frac{\int I_{ph}(n) \varepsilon p^2 dp}{\int \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \varepsilon^2 p^2 dp} \right). \quad (42.13)$$

Интеграл столкновений  $I(N)$  в правой части уравнения (42.2) состоит из двух слагаемых:  $I_{rph}(N)$ , обязанного рассеянию ротонов фононами, и  $I_r(N)$ , обязанного рассеянию ротонов ротонами.

Умножим левую и правую части уравнения (42.2) сначала на  $\mathcal{E}$ , а затем на  $P$  и проинтегрируем в обоих случаях с учетом (42.10) по всему  $P$ -пространству.

Поскольку согласно законам сохранения энергии и импульса

$$\int I_{rph}(N) \mathcal{E} d\tau_P = - \int I_{phr}(n) \varepsilon d\tau_p,$$

$$\int I_{rph}(N) P d\tau_P = - \int I_{phr}(n) p d\tau_p,$$

а

$$\int I_r(N) \mathcal{E} d\tau_P \text{ и } \int I_r(N) P d\tau_P$$

равны нулю, имеем

$$-\tilde{\omega} T \left( \frac{\partial S_r}{\partial T} \right)_\rho T'_r - \tilde{\omega} \rho \left( \frac{\partial S}{\partial p} \right)_T \rho' + S_r (w_r + v_s) =$$

$$= -\frac{\tilde{\omega}}{i\omega T} \int I_{phr}(n) \varepsilon d\tau_p, \quad (42.14)$$

$$-\tilde{\omega} \rho_{nr} w_r + \frac{T S_r}{c^2} T'_r = -\frac{\tilde{\omega}}{i\omega c} \int I_{phr}(n) p \cos \theta d\tau_p, \quad (42.15)$$

где  $\rho_{nr}$  — ротонная часть нормальной плотности, а  $S_r$  — энтропия единицы объема ротонного газа.

Приведем значения встречающихся в (42.13) — (42.15) интегралов:

$$\int \frac{\partial N_0}{\partial \mathcal{E}} \mathcal{E}^2 d\tau_P = -T \left( \frac{\partial}{\partial T} \int \mathcal{E} N_0 d\tau_P \right)_\rho = -T^2 \left( \frac{\partial S_r}{\partial T} \right)_\rho,$$

$$\int \frac{\partial N_0}{\partial \mathcal{E}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p} \mathcal{E} d\tau_P = -T \left( \frac{\partial}{\partial T} \int N_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p} d\tau_P \right)_\rho =$$

$$= -T \left( \frac{\partial \mu_r}{\partial T} \right)_\rho = T \left( \frac{\partial S_r}{\partial p} \right)_T,$$

$$\frac{1}{3} \int \frac{\partial N_0}{\partial \mathcal{E}} \mathcal{E} P V d\tau_P = -T S_r,$$

$$\frac{1}{3} \int \frac{\partial N_0}{\partial \mathcal{E}} P^2 d\tau_P = -\rho_{nr},$$

$$\frac{1}{3} \int \frac{\partial n_0}{\partial \mathcal{E}} p^2 d\tau_p = -\rho_{nph},$$

$$\frac{c^2}{\rho} + \int \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial p^2} n_0 d\tau_p + \int \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right)^2 d\tau_p +$$

$$+ \int \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial p^2} N_0 d\tau_P + \int \frac{\partial N_0}{\partial \mathcal{E}} \left( \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p} \right)^2 d\tau_P =$$

$$= \left[ \frac{\partial}{\partial p} \left( \mu_0 + \int n_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} d\tau_p + \int N_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p} d\tau_P \right) \right]_T = \left( \frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial P}{\partial p} \right)_T.$$

Займемся теперь вычислением входящих в уравнения (42.13) — (42.15) интегралов столкновений  $I_{phr}(n)$  и  $I_{ph}(N)$ :

$$I_{phr}(n) = - \int c d\sigma_{phr} \{ n N (n^* + 1) - n^* N^* (n + 1) \} d\tau_p. \quad (42.16)$$

Здесь величины со звездочкой относятся к рассеянным фононам и ротонам, а  $d\sigma_{phr}$  — дифференциальное эффективное сечение рассеяния фонона ротоном, определяемое формулой (14.7).

Подставляя в (42.16)  $n, n^*, N$  и  $N^*$ , выраженные в виде сумм постоянных равновесных значений и добавок (42.9), (42.10), и сохраняя только линейные по  $\nu$ ,  $\rho'$ ,  $T'_r$  и  $w_r$  члены, получим:

$$I_{phr}(n) = - \int c d\sigma_{phr} N_0 \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \{ \varepsilon [\nu (\cos \theta) - \nu (\cos \theta^*) +$$

$$+ w_r (\cos \theta - \cos \theta^*)] + (\varepsilon - \varepsilon^*) [\nu (\cos \theta^*) + T'_r] \} d\tau_P. \quad (42.17)$$

Величина  $\varepsilon - \varepsilon^*$  мала по сравнению с энергией  $\varepsilon$ . Однако учет этой разности в интеграле столкновений (42.17) оказывается существенным для обеспечения установления энергетического равновесия между фоновым и ротоным газами. Как мы увидим ниже, относительная медленность этого последнего процесса приводит к существенной диссипации и дисперсии звука и играет фундаментальную роль во всем последующем рассмотрении. Естественно при этом, что разность  $\varepsilon - \varepsilon^*$  мы учли только в тех членах в интеграле столкновений (42.17), которые ответственны за установление указанного энергетического равновесия.

Вычисление интеграла столкновений (42.17) с  $d\sigma_{phr}$  (14.7) приводит к весьма громоздкому выражению, содержащему первые шесть гармоник функции  $v(\cos\theta^*)$ . Однако вряд ли есть необходимость в таком вычислении, так как все указанные гармоники, за исключением нулевой, дадут ничтожный вклад в окончательный результат. Поэтому без большого ущерба для точности можно в (42.17) подставить усредненное по углам сталкивающихся частиц сечение рассеяния фонона на ротоне (14.18)\*. Интеграл столкновений (42.17) после подстановки сечения  $d\sigma_{phr}$ , определенного согласно (14.8), и  $\varepsilon - \varepsilon^* = \frac{p^2}{2\mu}(m, n - n^*)^2$  и интегрирования по всему  $P$ -пространству и по всем углам рассеянного фонона равен

$$I_{phr}(n) = -\frac{1}{\tau_{phr}(p)} \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \left\{ \varepsilon [v(\cos\theta) - v_0 + \cos\theta w_r] + \frac{\varepsilon^2}{3\mu c^2} (v_0 + T_r') \right\}, \quad (42.18)$$

$$\frac{1}{\tau_{phr}(p)} = 4\pi c N_r \left( \frac{P_0 p^2}{4\pi \hbar^2 \rho c} \right)^2 \left[ \frac{2}{9} + \frac{1}{25} \left( \frac{P}{\mu c} \right)^2 + \frac{2A}{9} \frac{P_0}{\mu c} + A^2 \right].$$

\* Заметим также, что более точное вычисление вряд ли имело бы смысл, поскольку уже при выводе формулы для матричного элемента перехода  $H'_{AF}$  во втором приближении теории возмущений (14.4) сделано ряд пренебрежений, сравнимых с тем эффектом, который мог дать учет высших гармоник. Так, например, при выводе (14.4) были опущены члены, содержащие  $(P - P_0)$ . Кроме того, упоминавшееся выше неравенство  $\varepsilon - \varepsilon^* < 3\mu c^2$  выполняется с небольшим запасом, что также ограничивает точность вычислений.

С учетом (42.18) интегралы, содержащие  $I_{phr}(n)$  в правых частях уравнений (42.13) — (42.15), легко вычисляются, и они равны:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\int I_{phr}(n) \varepsilon p^2 dp}{\int \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \varepsilon^2 p^2 dp} &= -\frac{1}{\tau_{phr}} [v(\cos\theta) - v_0 + \\ &+ \cos\theta w_r + \beta(v_0 + T_r')], \\ \frac{1}{T} \int I_{phr}(n) \varepsilon d\tau_P &= \frac{1}{\tau_{phr}} \beta C_{ph} (v_0 + T_r'), \\ \frac{1}{C} \int I_{phr}(n) p \cos\theta d\tau_P &= \frac{1}{\tau_{phr}} \rho_{nph} (v_1 + w_r), \end{aligned} \right\} \quad (42.19)$$

где

$$\beta = \frac{3kT}{\mu c^2},$$

а  $\tau_{phr}$  — величина времени, характеризующего процесс рассеяния фононов ротонами

$$\frac{1}{\tau_{phr}} = \frac{4\pi^3}{c} N_r \left[ \frac{P_0 \left( \frac{kT}{c} \right)^2}{\rho \hbar^2} \right]^2 \left[ \frac{2}{9} + \frac{1}{25} \left( \frac{P_0}{\mu c} \right)^2 + \frac{2A}{9} \frac{P_0}{\mu c} + A^2 \right]. \quad (42.20)$$

Наконец, вычислим  $\int I_{ph}(n) \varepsilon p^2 dp$ , который оказывается сходящимся без учета дисперсии фононов

$$\begin{aligned} \int I_{ph}(n) \varepsilon p^2 dp &= \\ &= - \int c d\sigma_{ph} \{ n n_1 (n^* + 1) (n_1^* + 1) - n^* n_1^* (n + 1) (n_1 + 1) \} \times \\ &\quad \times \varepsilon p^2 dp d\tau_{p_1}. \end{aligned} \quad (42.21)$$

Здесь величины со звездочкой относятся к рассеянным фононам, а  $d\sigma_{ph}$  — дифференциальное эффективное сечение для рассеяния фонона с импульсом  $p$  фононом с импульсом  $p_1$ .

Подставляя в (42.21) функции распределения падающих и рассеянных фононов, выраженные в виде сумм постоянных равновесных значений и добавок (42.9) и сохраняя

только линейные по  $v$  и  $\rho'$  члены, получим

$$\begin{aligned} \int I_{ph}(n) \varepsilon p^2 dp = \\ = \int c d\sigma_{ph} n_0 n_{01} (n_{01}^* + 1) (n_0^* + 1) \{ (\varepsilon + \varepsilon_1 - \varepsilon^* - \varepsilon_1^*) \rho' u + \\ + \varepsilon v (\cos \theta) + \varepsilon_1 v (\cos \theta_1) - \varepsilon^* v (\cos \theta^*) - \\ - \varepsilon_1^* v (\cos \theta_1^*) \} \frac{\varepsilon}{kT} p^2 dp d\tau_{ph}. \end{aligned} \quad (42.22)$$

Вследствие законов сохранения импульса и энергии члены с  $v_0$  и  $v_1$  в фигурной скобке (42.21) сократятся, в результате чего останутся шаровые гармоники, начиная со второй. Как мы увидим ниже, рассматриваемый процесс рассеяния фононов фононами играет роль только при низких температурах (ниже  $0,9^\circ \text{K}$ ), и для того чтобы не усложнять вычислений, мы несколько загрубим интеграл (42.22), переписав его в виде

$$\begin{aligned} \int I_{ph}(n) \varepsilon p^2 dp = \\ = - \frac{1}{\tau_{ph}} [v (\cos \theta) - v_0 - v_1 \cos \theta] \int \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \varepsilon^2 p^2 dp, \end{aligned} \quad (42.23)$$

где время  $\tau_{ph}$  вычислено точно для второй шаровой гармоники

$$\frac{1}{\tau_{ph}} = \frac{9(13)!(u+1)^4}{2^{13}(2\pi\hbar)^7\rho^2c} \left( \frac{kT}{c} \right)^9. \quad (42.24)$$

Незначительная погрешность, которую мы при этом допускаем, качественно не меняет общей картины.

Из рис. 7 видно, что при сравнительно высоких температурах (выше  $0,9^\circ \text{K}$ ) рассеяние фононов фононами по сравнению с рассеянием фононов ротоном можно не учитывать, поскольку  $\tau_{ph} \gg \tau_{phr}$ . В области температур от  $0,6^\circ \text{K}$  до  $0,9^\circ \text{K}$   $\tau_{ph} \sim \tau_{phr}$  и существенны оба процесса рассеяния. Наконец, при очень низких температурах (ниже  $0,6^\circ \text{K}$ )  $\tau_{ph} \ll \tau_{phr}$ , и в этом случае существенным является только эффект рассеяния фононов фононами.

Мы рассмотрим сначала наиболее интересную область температур от  $0,9^\circ \text{K}$  до  $1,2^\circ \text{K}$ . В этой области температур второй член в правой части уравнения (42.13) по величине значительно меньше первого и им можно пренебречь.

Уравнения (42.14) — (42.15) после несложных преобразований и подстановки в них интегралов (42.19) могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \frac{S_r}{C_r} \frac{\rho_{nph}}{\rho} (v_1 + w_r) - \tilde{\omega} T_r' + \frac{\rho_s}{\rho} \frac{S_r}{C_r} w_r + \\ + \frac{C_{ph}}{C_r} \beta (\tilde{\omega} - \tilde{Z}_{phr}) (v_0 + T_r') - \frac{S_{ph}}{C_r} \tilde{\omega} (3u + 1 + \delta) \rho' = 0, \end{aligned} \quad (42.25)$$

$$- \tilde{\omega} w_r + \frac{T S_r}{\rho_{nr} c^2} T_r' + \frac{\rho_{nph}}{\rho_{nr}} (\tilde{\omega} - \tilde{Z}_{phr}) (v_1 + w_r) = 0, \quad (42.26)$$

$$- \tilde{\omega} \rho' + j_r - \frac{\rho_{nph}}{\rho} (v_1 + w_r) = 0, \quad (42.27)$$

$$\begin{aligned} - \tilde{\omega} j_r + \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T \rho' + \frac{\rho_{nph}}{\rho} \{ (\tilde{\omega} - \tilde{Z}_{phr}) (v_1 + w_r) - \\ - 3u (v_0 + T_r') - (1 + \delta) T_r' \} = 0, \end{aligned} \quad (42.28)$$

$$\begin{aligned} - (\tilde{Z}_{phr} - \cos \theta) v (\cos \theta) = \tilde{\omega} u \rho' + \cos^2 \theta \left( j_r - \frac{\rho_n}{\rho} w_r \right) + \\ + (\tilde{\omega} - \tilde{Z}_{phr}) [v_0 - \cos \theta w_r + \beta (v_0 + T_r')]. \end{aligned} \quad (42.29)$$

Мы ввели обозначения:

$$\begin{aligned} j_r = \frac{\rho_s}{\rho} v_s + \frac{\rho_n}{\rho} v_{nr}, \quad C_r = T \left( \frac{\partial S_r}{\partial T} \right)_\rho, \\ \tilde{Z}_{phr} = \tilde{\omega} \left( 1 - \frac{1}{i\omega\tau_{phr}} \right), \quad \delta = \frac{T}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P / \left[ \frac{\rho_{nph}}{\rho} \right] = -3u - 1 - \\ - \frac{S_r}{S_{ph}} \left\{ 1 - 2 \frac{\rho}{P_0} \frac{\partial P_0}{\partial \rho} - \frac{1}{2} \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \rho} + \frac{\Delta}{T} \frac{\frac{\Delta}{T} + \frac{1}{2} \frac{\rho}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \rho}}{\frac{\Delta}{T} + \frac{3}{2} \frac{\rho}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \rho}} \right\}^*. \end{aligned}$$

Умножим левую и правую части уравнения (42.29) сначала на 1, а затем на  $(\tilde{Z}_{phr} - \cos \theta)^{-1}$  и в обоих случаях усредним их по  $\cos \theta$ . Полученные таким образом уравнения

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} u \rho' - 3\tilde{\omega} T_r' + j_r + \frac{\rho_s}{\rho} w_r + \\ + 3 [\tilde{\omega} - \beta (\tilde{\omega} - \tilde{Z}_{phr})] (v_0 + T_r') - (v_1 + w_r) = 0 \end{aligned} \quad (42.30)$$

\*) Величина  $\frac{\rho}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \rho}$  согласно нейтронографическим данным приблизительно равна  $-2,1$ .

и

$$[2 + (1 - \beta)(\tilde{\omega} - \tilde{Z}_{phr}) \ln \tilde{a}] (\nu_0 + T_r) + \tilde{\omega} u \ln \tilde{a} \rho' - \\ - [2 + (\tilde{\omega} - \tilde{Z}_{phr}) \ln \tilde{a}] T_r' + [\tilde{Z}_{phr} j_r - (\tilde{\omega} - \frac{\rho_s}{\rho} \tilde{Z}_{phr}) w_r] \times \\ \times (-2 + Z_{phr} \ln \tilde{a}) = 0 \quad (\tilde{a} = (\tilde{Z}_{phr} + 1)/(\tilde{Z}_{phr} - 1)) \quad (42.31)$$

совместно с (42.25) — (42.29) представляют собой полную систему шести линейных однородных уравнений. Уравнения (42.25) — (42.28) содержат существенную малую величину  $\frac{\rho_{nph}}{\rho} = 1,28 \cdot 10^{-4} T^4$ . Мы сохраним члены малого

порядка не выше  $\frac{\rho_{nph}}{\rho}$ . В этом приближении уравнения (42.27) и (42.28) описывают распространение первого звука, а уравнения (42.25) и (42.26) — второго звука. Последняя пара (42.30) и (42.31) дает нам еще одно дисперсионное уравнение (в нулевом приближении)

$$2 + (1 - \beta)(\tilde{\omega} - \tilde{Z}_{phr}) \ln \tilde{a} = 0,$$

которое при  $T > 0,6^\circ \text{K}$  не имеет незатухающих звуковых решений. При температуре ниже  $0,6^\circ \text{K}$  уравнения (42.25), (42.26) неприменимы (ротонны практически отсутствуют), а уравнения (42.30) и (42.31), дополненные членами, содержащими  $I_{ph}(n)$  (см. уравнение (42.13)), как мы увидим ниже, описывают незатухающие температурные волны в фоновом газе (второй звук).

Заметим, что при выводе уравнений (42.25) — (42.28), (42.30), (42.31) мы всюду полагали энергию фонона равной  $\epsilon = cp$ . Как показывают несложные вычисления, членом, содержащим  $\gamma p^2$  в выражении для  $\epsilon$  (12.1), можно пренебречь, если выполнено условие

$$\frac{1}{\omega \tau_{phr}} \left(1 + \frac{\tau_{phr}}{\tau_{ph}}\right) \gg 3 \gamma \left(2\pi \frac{kT}{c}\right)^2 \frac{B_2}{B_2}, \quad (42.32)$$

где  $B_2$  и  $B_3$  — числа Бернулли:  $B_2 = \frac{1}{30}$ ,  $B_3 = \frac{1}{42}$ . Для рассматриваемой нами области частот ( $\omega \tau_r, \omega \tau_{ph} \ll 1$ ) условие (42.32) практически всегда выполняется для температур выше  $0,6^\circ \text{K}$ .

### § 43. Первый звук

Область температур от  $0,9$  до  $1,2^\circ \text{K}$ . Уравнения (42.27) и (42.28), описывающие распространение первого звука, в указанном выше приближении имеют вид

$$\begin{cases} -\tilde{\omega} \rho' + j_r - \frac{\rho_{nph}}{\rho} \nu_1 = 0, \\ -\tilde{\omega} j_r + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T \rho' + \frac{\rho_{nph}}{\rho} [(\tilde{\omega} - \tilde{Z}_{phr}) \nu_1 - 3u \nu_0] = 0, \end{cases} \quad (43.1)$$

где  $\nu_0$  и  $\nu_1$  согласно (42.30) и (42.31) равны

$$\nu_0 = - \frac{\tilde{\omega} u \ln \tilde{a} \rho' + \tilde{Z}_{phr} (-2 + \tilde{Z}_{phr} \ln \tilde{a}) j_r}{2 + (1 - \beta)(\tilde{\omega} - \tilde{Z}_{phr}) \ln \tilde{a}}, \quad (43.2)$$

$$\nu_1 = 3\tilde{\omega} u \rho' + j_r + 3[\tilde{\omega} - \beta(\tilde{\omega} - \tilde{Z}_{phr})] \nu_0. \quad (43.3)$$

Из условия существования нетривиального решения (43.1) находим комплексную скорость первого звука

$$\frac{\omega}{k} = u_{10} - \frac{1}{2} c \frac{\rho_{nph}}{\rho} \varphi(Z_{phr}^*), \quad (43.4)$$

где  $u_{10} = \sqrt{(\partial P / \partial \rho)_T}$  — скорость распространения первого звука \*\*\*) в области малых частот,  $\omega \tau_{phr} \ll 1$

$$\begin{aligned} \varphi(Z_{phr}) &= Z_{phr} - \\ &- 3 \frac{u^2 \ln a + \{2u Z_{phr} + Z_{phr}^2 [1 - \beta(1 - Z_{phr})]\}(-2 + Z_{phr} \ln a)}{2 + (1 - \beta)(1 - Z_{phr}) \ln a} \end{aligned} \quad (43.5)$$

$$\left( Z_{phr} = 1 - \frac{1}{i\omega \tau_{phr}}, \quad a = \frac{Z_{phr} + 1}{Z_{phr} - 1} \right).$$

\*) Поскольку второе слагаемое в правой части (43.4) много меньше первого ( $u(u_{10} \approx c)$ ), то в функции  $\varphi(Z_{phr})$  мы всюду полагаем  $\tilde{\omega} = 1$ .

\*\*) То обстоятельство, что скорость  $u_{10}$  оказалась равной изотермической скорости звука, есть результат пренебрежения коэффициентом температурного расширения,  $\frac{T}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T}$  аномально мало в гелии II. Как известно, разность между адиабатической и изотермической скоростью звука пропорциональна квадрату указанного коэффициента.

Действительная часть (43.4) есть скорость первого звука

$$u_1 = u_{10} - \frac{1}{2} c \frac{\rho_{nph}}{\rho} \operatorname{Re} \Phi(Z_{phr}). \quad (43.6)$$

Коэффициент поглощения первого звука  $\alpha_1$  есть мнимая часть волнового вектора. Согласно (43.4) он равен

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \frac{\omega}{c} \frac{\rho_{nph}}{\rho} \operatorname{Im} \Phi(Z_{phr}). \quad (43.7)$$

Выражения (43.6) и (43.7) определяют дисперсию и поглощение обычного звука, обязанные сравнительно медленному процессу рассеяния фононов ротонами. Анализ функции  $\Phi(Z_{phr})$  показывает, что существенная дисперсия обычного звука наступает, когда параметр  $\omega\tau_{phr}$  становится порядка единицы.

Рассмотрим область малых частот, удовлетворяющих условию  $\omega\tau_{phr} \ll 1$ . В этой области  $1/Z_{phr} \ll 1$  и выражения, в (43.5) содержащие  $\ln a$ , можно разложить в степенной ряд по величине  $1/Z_{phr}$ :

$$\left. \begin{aligned} \ln a &= \frac{2}{Z_{phr}} \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{1}{Z_{phr}^2} \right), \\ -2 + Z_{phr} \ln a &= \frac{2}{Z_{phr}^2} \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \frac{1}{Z_{phr}^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (43.8)$$

Подставляя (43.8) в (43.5) и сохраняя линейные по  $\omega\tau_{phr}$  члены, получим

$$\Phi = i\omega\tau_{phr} \left[ \frac{4}{15} + \frac{(3u+1)^2}{3\beta} \right],$$

откуда согласно (43.6) и (43.7) следует, что в области малых частот

$$\begin{aligned} u_1 &= u_{10}, \\ \alpha_1 &= \frac{\omega^2\tau_{phr}}{c} \frac{\rho_{nph}}{\rho} \left[ \frac{2}{15} + \frac{(3u+1)^2}{6\beta} \right]. \end{aligned} \quad (43.9)$$

Первый член в поглощении звука обязан фононной части коэффициента обычной вязкости

$$\eta = \frac{1}{5} c^2 \rho_{nph} \tau_{phr}, \quad (43.10)$$

второй член — коэффициенту второй вязкости

$$\zeta_2 = \frac{1}{3\beta} (3u+1)^2 c^2 \rho_{nph} \tau_{phr}. \quad (43.11)$$

Как уже указывалось выше, вторая вязкость возникла благодаря тому, что установление энергетического равновесия между фононным и ротонным газами затруднено, в то время как в каждом из них в отдельности оно имеется.

Подстановка в (43.9) численных значений всех параметров показывает, что второй член по величине значительно превосходит первый во всей области температур. Таким образом, для малых частот,  $\omega\tau_{phr} \ll 1$ , поглощение обычного звука в основном определяется второй вязкостью.

В области больших частот, удовлетворяющих условию  $\omega\tau_{phr} \gg 1$ ,  $Z_{phr}$  становится порядка единицы. Полагая в (43.6) и (43.7)  $Z_{phr} = 1$ , получим

$$u_1 = u_{10} + c \frac{\rho_{nph}}{\rho} \left\{ \frac{3}{4} (u+1)^2 \ln(2\omega\tau_{phr}) - 3u - 2 \right\}, \quad (43.12)$$

$$\alpha_1 = \frac{3}{8} \pi \frac{\omega}{c} (u+1)^2 \frac{\rho_{nph}}{\rho}. \quad (43.13)$$

Область температур от  $0,6^\circ \text{K}$  до  $0,9^\circ \text{K}$ . В этой области температур наряду с рассеянием фононов ротонами становится существенным и рассеяние фононов фононами. Поэтому в уравнении (43.13) мы должны сохранить интеграл столкновений  $I_{ph}(n)$ . Учет  $I_{ph}(n)$  сказывается только на виде функции  $\Phi$ , которая теперь зависит от двух параметров  $Z_{phr}$  и  $Z_{ph} = 1 - 1/i\omega\tau_{ph}$ :

$$\Phi(Z_{phr}, Z_{ph}) = Z_{phr} -$$

$$- 3 \frac{u^2 \ln a + \{2uZ_{phr} + Z_{phr}^2 [1 - \beta(1 - Z_{phr})] + 3u^2 (1 - Z_{ph})\} b}{2 + [1 - Z_{ph} + (1 - \beta)(1 - Z_{phr})] \ln a + 3(1 - Z_{ph})[1 - \beta(1 - Z_{ph})] c} \quad (43.14)$$

$$\left( a = \frac{Z_{phr} + Z_{ph}}{Z_{phr} + Z_{ph} - 2}, b = -2(Z_{phr} + Z_{ph} - 1) \ln a, c = -2 + (Z_{phr} + Z_{ph} - 1) \ln a \right).$$

Скорость и коэффициент поглощения первого звука определяется по-прежнему выражениями (43.6) и (43.7),

но с функцией  $\varphi(Z_{phr}, Z_{ph})$  из (43.14)

$$u_1 = u_{10} - \frac{1}{2} c \frac{\rho_{nph}}{\rho} \operatorname{Re} \varphi(Z_{phr}, Z_{ph}), \quad (43.15)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \frac{\omega}{c} \frac{\rho_{nph}}{\rho} \operatorname{Im} \varphi(Z_{phr}, Z_{ph}). \quad (43.16)$$

В уравнениях (43.1) мы учли только члены малого порядка не выше  $\rho_{nph}/\rho$ . Если в (43.1) учесть следующие члены разложения, то в выражениях для  $\varphi$  (43.5) и (43.14) появится слагаемое, содержащее производную  $(\partial \rho / \partial T)_P \sim \delta$ . Учет этого слагаемого существен лишь в области малых частот  $\omega \tau_{phr}, \omega \tau_{ph} \ll 1$  и температур ниже  $0,9^\circ \text{K}$ . Скорость и коэффициент поглощения в этом случае равны

$$u_1 = u_{10} + \frac{1}{2} c \delta^2 \frac{S_{ph} \rho_{nph}}{C \rho}, \quad (43.17)$$

$$\alpha_1 = \frac{\omega^2 \tau_{phr} \rho_{nph}}{c \rho} \left\{ \frac{2/15}{1 + \tau_{phr}/\tau_{ph}} + \frac{1}{6\beta} \left( 3u + 1 + \delta \frac{C_{ph}}{C} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \delta^2 \left( \frac{S_{ph}}{C} \right)^2 \left( 1 - \frac{TS}{\rho n c^2} \right)^2 \right\}. \quad (43.18)$$

Как будет показано в § 47, первый член в выражении (43.18) обязан фоновой части коэффициента первой вязкости

$$\eta_{ph} = \frac{1}{5} c^2 \rho_{nph} \frac{\tau_{phr}}{1 + \frac{\tau_{phr}}{\tau_{ph}}}, \quad (43.19)$$

второй член — коэффициенту второй вязкости

$$\zeta_2 = \frac{1}{3\beta} \left( 3u + 1 + \delta \frac{C_{ph}}{C} \right)^2 c^2 \rho_{nph} \tau_{phr}, \quad (43.20)$$

третий — фоновой части коэффициента теплопроводности

$$\kappa = c^2 S_{ph} \tau_{phr} \left( 1 - \frac{TS}{\rho n c^2} \right)^2. \quad (43.21)$$

Для больших частот,  $\omega \tau_{phr}, \omega \tau_{ph} \gg 1$  в рассматриваемой области температур скорость первого звука равна

$$u_1 = u_{10} + c \frac{\rho_{nph}}{\rho} \left\{ \frac{3}{4} (u + 1)^2 \ln \frac{2\omega \tau_{phr}}{1 + \tau_{phr}/\tau_{ph}} - 3u - 2 \right\},$$

а коэффициент поглощения его по-прежнему определяется выражением (43.13).

## § 44. Второй звук

Область температур от  $0,6$  до  $1,2^\circ \text{K}$ . Уравнения (42.25) и (42.26), описывающие распространение второго звука, с учетом членов малого порядка не выше  $\frac{\rho_{nph}}{\rho}$  имеют вид:

$$-\tilde{\omega} T'_r + \frac{\rho_s}{\rho} \frac{S_r}{C_r} w_r + \frac{C_{ph}}{C_r} \beta (\tilde{\omega} - Z_{phr}) (v_0 + T'_r) + \\ + \frac{S_r \rho_{nph}}{C_r \rho} (v_1 + w_r) = 0, \quad (44.1)$$

$$-\tilde{\omega} w_r + \frac{TS_r}{\rho n c^2} T'_r + \frac{\rho_{nph}}{\rho n r} (\tilde{\omega} - \tilde{Z}_{phr}) (v_1 + w_r) = 0,$$

где

$$v_0 + T'_r = \\ = \frac{[2 + (\tilde{\omega} - \tilde{Z}_{phr}) \ln \tilde{a}] T'_r + \left( \tilde{\omega} - \frac{\rho_s}{\rho} \tilde{Z}_{phr} \right) (-2 + \tilde{Z}_{phr} \ln \tilde{a}) w_r}{2 + (1 - \beta) (\tilde{\omega} - \tilde{Z}_{phr}) \ln \tilde{a}},$$

$$v_1 + w_r = -3\tilde{\omega} T'_r + \frac{\rho_s}{\rho} w_r + 3[\tilde{\omega} - \beta(\tilde{\omega} - \tilde{Z}_{phr})](v_0 + T'_r). \quad (44.2)$$

Анализ выражений (44.2) показывает, что существенная дисперсия второго звука наступает, когда  $\omega \tau_{phr}$  становится порядка  $u_2/u_1$  ( $u_2$  — скорость второго звука). Это обстоятельство благоприятствует наблюдению указанного явления, так как поскольку  $u_2/u_1 \ll 1$ , дисперсия второго звука наступает при более низких частотах, чем для первого звука.

Условие  $\omega \tau_{phr} \sim u_2/u_1$  можно переписать в виде  $l_{ph} \sim \lambda$ , где  $l_{ph}$  — длина свободного пробега фонона, а  $\lambda$  — длина волны второго звука. Таким образом, дисперсия второго звука наступает, как и следовало ожидать, когда длина волны второго звука сравнивается с длиной свободного пробега фононов, т. е. мы имеем дело с пространственной дисперсией.

Условие существования нетривиального решения системы (44.1) заключается в равенстве нулю ее определителя.

Раскрывая указанный определитель, получаем уравнение для определения комплексной скорости второго звука  $\omega/k$ . Для частот порядка  $\omega\tau_{phr} \sim 1$  это уравнение выглядит так

$$u_{2\infty}^2 = \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 \left\{ 1 - \beta \frac{C_{ph}}{C_r} (1 - Z_{phr}) \frac{2 + (\tilde{\omega} - \tilde{Z}) \ln \tilde{a}}{2 + (1 - \beta)(\tilde{\omega} - \tilde{Z}_{phr}) \ln \tilde{a}} \right\}, \quad (44.3)$$

где

$$u_{2\infty} = \left[ \left(1 - \frac{\rho_{nr}}{\rho}\right) \frac{TS_r^2}{\rho_{nr} C_r} \right]^{1/2}, \quad \tilde{a} = \frac{\tilde{Z}_{phr} + 1}{\tilde{Z}_{phr} - 1}. \quad (44.4)$$

Выражение для  $u_{2\infty}$  совпадает с хорошо известным выражением для скорости второго звука, в которое подставляются все термодинамические величины для ротонного газа.

В (44.3) мы опустили все члены, отношение которых к последнему члену по величине не превышает

$$\frac{1}{\beta} \left( \frac{k\Delta}{cP_0} \right)^2 \ll 1^*.$$

Уравнение (44.3) для частот  $\omega \sim \frac{1}{\tau_{phr}} \frac{u_1}{u_2}$  невозможно решить в буквенном виде, решение его требует численных расчетов.

В области больших частот  $\omega\tau_{phr} \gg u_2/u_1$  уравнение (44.3) существенно упрощается и легко получить, что

$$\frac{\omega}{k} = u_{2\infty} \left( 1 - \frac{\beta C_{ph}/C_r}{i\omega\tau_{phr}} \right)^{-1/2}. \quad (44.5)$$

Из формулы (44.5) видно, что в случае очень больших частот  $\omega\tau_{phr} \gg \beta \frac{C_{ph}}{C_r}$  второй звук распространяется только по ротонному газу со скоростью, равной  $u_{2\infty}$  (см. (44.4)), а коэффициент поглощения его не зависит от

\* Неравенство  $\frac{1}{\beta} \left( \frac{k\Delta}{cP_0} \right)^2 \ll 1$  выполняется для всех температур выше  $0,3^\circ \text{ K}$ .

частоты и равен

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \frac{\beta C_{ph}/C_r}{u_{2\infty} \tau_{phr}}. \quad (44.6)$$

В области малых частот, удовлетворяющих условию  $1/\tilde{Z}_{phr} \ll 1$ ,  $\omega\tau_{phr} \ll u_2/u_1$  и в (44.2) выражения, содержащие  $\ln a$ , можно разложить в степенной ряд по величине  $1/\tilde{Z}_{phr}$  (43.8). В результате длинных вычислений условие совместности системы (44.1) принимает следующий вид:

$$\left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = u_{20}^2 - i\omega\tau_{phr}c^2 \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\rho_{nph}}{\rho} \left\{ \frac{4}{15} + \frac{\rho_n}{\rho_s} \frac{\rho c^2}{TC} \left(1 - \frac{TS}{\rho_n c^2}\right)^2 + \frac{1}{3\beta} \left(1 - 3\frac{S}{C}\right)^2 \right\}, \quad (44.7)$$

где

$$u_{20} = \left( \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{TS^2}{\rho C} \right)^{1/2}. \quad (44.8)$$

Для частот  $\omega \ll \frac{1}{\tau_{phr}} \frac{u_2}{u_1}$  мнимые члены в правой части (44.7) малы по сравнению с действительным. В этом случае скорость распространения второго звука равна  $u_{20}$  (ф-ла (44.8)), а коэффициент поглощения его определяется выражением

$$\alpha_2 = \frac{\omega^2 c^2 \tau_{phr}}{u_{20}^3} \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\rho_{nph}}{\rho} \left\{ \frac{2}{15} + \frac{1}{2} \frac{\rho_n}{\rho_s} \frac{\rho c^2}{TC} \left(1 - \frac{TS}{\rho_n c^2}\right)^2 + \frac{1}{6\beta} \left(1 - 3\frac{S}{C}\right)^2 \right\}. \quad (44.9)$$

Первые два члена в (44.9) обязаны своим возникновением соответственно фоновой части коэффициента первой вязкости  $\eta_{ph}$  (43.10) и фоновой части коэффициента теплопроводности  $\kappa_{ph}$  (43.21)\*. Третий член в (44.9) соответствует комбинации из коэффициентов второй вязкости  $(\zeta_2 + \rho^2 \zeta_3 - 2\rho \zeta_1)$ , входящей в (23.13). Как будет

\* Формула (43.21) для фоновой части коэффициента теплопроводности справедлива во всем интервале температур от  $0,6 - 1,2^\circ \text{ K}$  (подробнее см. в § 47).

показано в § 47, коэффициенты  $\zeta_1$  и  $\zeta_3$  равны

$$\rho \zeta_1 = \frac{1}{\beta} (3u + 1) \left( u + \frac{S}{C} \right) c^2 \rho_{nph} \tau_{phr},$$

$$\rho^2 \zeta_3 = \frac{3}{\beta} \left( u + \frac{S}{C} \right)^2 c^2 \rho_{nph} \tau_{phr}.$$

Подстановка численных значений всех параметров в (44.9) показывает, что второй член по величине значительно превосходит два других. Таким образом, в области малых частот ( $\omega \tau_{phr} \ll u_2/u_1$ ) поглощение второго звука определяется в основном фоновой частью коэффициента теплопроводности.

На рис. 8 изображена температурная зависимость скоростей  $u_{20}$  (44.8) и  $u_{2\infty}$  (44.4). При фиксированной температуре с увеличением частоты мы постепенно переходим с кривой  $u_{20}$ , описывающей равновесный второй звук, на кривую  $u_{2\infty}$ , описывающую роторный второй звук.

Рис. 8.

Область температур от  $0.6^\circ\text{K}$  до  $0.9^\circ\text{K}$ . В этой области температур рассеяние фононов фононами становится существенным и в уравнении (42.13) следует учесть интеграл столкновений  $I_{ph}(n)$ , характеризующий этот процесс рассеяния. Учет  $I_{ph}(n)$  преобразует уравнение (44.3) к виду

$$u_{2\infty}^2 = \left( \frac{\omega}{k} \right)^2 \left\{ 1 - \beta \frac{C_{ph}}{C_r} (1 - Z_{phr}) \times \right. \\ \times \frac{2 + (\tilde{\omega} - \tilde{Z}_{phr}) \ln \tilde{a} + 3\tilde{\omega} \tilde{b} [-2 + (\tilde{Z}_{phr} + \tilde{Z}_{ph} - \tilde{\omega}) \ln \tilde{a}]}{2 + [\tilde{\omega} - \tilde{Z}_{ph} + (1 - \beta)(\tilde{\omega} - \tilde{Z}_{phr}) \ln \tilde{a}] + 3\tilde{b} [\tilde{\omega} - \beta(\tilde{\omega} - \tilde{Z}_{phr}) \tilde{c}]} \cdot \\ \left. \left( \tilde{a} = \frac{\tilde{Z}_{phr} + \tilde{Z}_{ph}}{\tilde{Z}_{phr} + \tilde{Z}_{ph} - 2}, \quad \tilde{b} = \tilde{\omega} - \tilde{Z}_{ph}, \quad \tilde{c} = -2 + (\tilde{Z}_{phr} + \tilde{Z}_{ph} - 1) \ln \tilde{a} \right) \right\} \quad (44.10)$$

и оно, как мы указывали выше, в общем случае может быть решено только в численном виде.

Для больших частот  $\omega \tau_{phr}, \omega \tau_{ph} \gg 1$  из уравнения (44.10) снова получается (44.5). При достаточно низких температурах отношение  $\beta C_{ph}/C_r$  может стать большим и, как видно из формулы (44.5), роторный второй звук будет сильно затухать. Для очень больших частот  $\omega \tau_{phr} \gg \beta C_{ph}/C_r$  формулы (44.4) и (44.6) по-прежнему справедливы.

В области малых частот,  $\omega \tau_{phr}, \omega \tau_{ph} \ll 1$ , рассеяние фононов фононами не дает существенного вклада в поглощение второго звука, поскольку учет указанного рассеяния сказывается только на виде самого малого по величине члена в выражении (44.9)

$$\alpha_2 = \frac{\omega^2 c^2 \tau_{phr}}{u_{20}^3} \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\rho_{nph}}{\rho} \times \\ \times \left\{ \frac{2^{15}}{1 + \tau_{phr}/\tau_{ph}} + \frac{1}{2} \frac{\rho_n}{\rho_s} \frac{\rho c^2}{TC} \left( 1 - \frac{TS}{\rho_n c^2} \right)^2 + \frac{1}{6\beta} \left( 1 - \frac{3S}{C} \right) \right\}, \quad (44.11)$$

соответствующего (43.19).

В рассматриваемой области температур для частот  $\omega \tau_{phr}, \omega \tau_{ph} \ll 1$  в уравнениях (44.1) следует учесть члены, содержащие производную  $(\partial \rho / \partial T)_P \sim \delta$ . Учет  $(\partial \rho / \partial T)_P$  приводит к появлению дополнительных слагаемых в выражении для скорости второго звука

$$u_2 = u_{20} \left( 1 - \frac{1}{2} \delta^2 \frac{S_{ph}}{C} \frac{\rho_{nph}}{\rho} \right),$$

а также в выражениях для коэффициентов второй вязкости  $\zeta_2$  (43.20)

$$\left. \begin{aligned} \rho \zeta_1 &= \frac{1}{\beta} \left( 3u + 1 + \delta \frac{C_{ph}}{C} \right) \left( u + \frac{S}{C} + \delta \frac{S_{ph}}{C} \right) c^2 \rho_{nph} \tau_{phr}, \\ \rho^2 \zeta_3 &= \frac{3}{\beta} \left( u + \frac{S}{C} + \delta \frac{S_{ph}}{C} \right)^2 c^2 \rho_{nph} \tau_{phr}. \end{aligned} \right\} \quad (44.12)$$



То обстоятельство, что производная  $(\partial \rho / \partial T)_P$  не вошла в выражение для поглощения второго звука, связано с тем, что входящая в (44.11) комбинация из коэффициентов второй вязкости (43.20), (44.12)  $\zeta_2 + \rho^2 \zeta_3 - 2\rho \zeta_1$  при  $T < 0,9^\circ \text{K}$  осталась прежней и равной  $\frac{1}{3\beta} \left(1 - \frac{3S}{C}\right)$ .

### § 45. Область температур выше 1,2° К

При температурах выше 1,2° К фононы, движущиеся в заданном направлении, как уже указывалось, описываются квазиравновесной функцией распределения (41.1), зависящей от химического потенциала  $\alpha$  в этом направлении. Отклонение  $n$  от ее постоянного равновесного значения  $n_0$  согласно (41.2) равно

$$n' = \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \left[ \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \rho' + \varepsilon v(\cos \theta) + kT \alpha(\cos \theta) \right], \quad (45.1)$$

где  $v(\cos \theta)$  и  $\alpha(\cos \theta)$  — неизвестные функции угла  $\theta$ , которые будут найдены в результате решения кинетического уравнения.

Полная энергия фононов, движущихся в заданном направлении, и их число при рассеянии на малые углы при четырехфононном процессе сохраняются. В области  $T < 1,2^\circ \text{K}$  пятифононный процесс не меняет энергии фононов, движущихся в заданном направлении, но существенным образом изменяет их число.

Подставим (45.1) в уравнение (42.5) и проинтегрируем правую и левую части его по всем фононам и по всем возможным энергиям. Поскольку согласно сказанному интегралы

$$\int I'_{ph}(n) \varepsilon p^2 dp, \quad \int I'_{ph}(n) p^2 dp \quad \text{и} \quad \int I_{3 \rightarrow 2}(n) \varepsilon p^2 dp$$

равны нулю, имеем

$$\begin{aligned} (\tilde{\omega} - \cos \theta) \left[ v(\cos \theta) + \frac{27}{\pi^4} \alpha(\cos \theta) \right] + \tilde{\omega} \rho' + \cos^2 \theta v_s = \\ = - \frac{\tilde{\omega}}{i\omega} \frac{\int I_{phr}(n) \varepsilon p^2 dp}{\int \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \varepsilon^2 p^2 dp}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \frac{\tilde{\omega}}{i\omega} \left\{ \frac{\int I_{phr}(n) p^2 dp}{\int \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \varepsilon p^2 dp} + \frac{\int I_{3 \rightarrow 2}(n) p^2 dp}{\int \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \varepsilon p^2 dp} \right\} = \\ = (\tilde{\omega} - \cos \theta) \left[ v(\cos \theta) + \frac{5\pi^2}{108} \alpha(\cos \theta) \right] + \tilde{\omega} \rho' + \cos^2 \theta v_s. \end{aligned} \quad (45.2)^*$$

Интеграл столкновений  $I_{phr}(n)$ , вычисленный по формуле (42.16) с функцией распределения (45.1), равен

$$\begin{aligned} I_{phr}(n) = - \frac{1}{\tau_{phr}(p)} \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \left\{ \varepsilon [v(\cos \theta) - v_0 + \cos \theta w_r] + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon^2}{3\mu c^2} (v_0 + T_r') + kT [\alpha(\cos \theta) - \alpha_0] \right\} \end{aligned} \quad (45.3)$$

( $\alpha_0$  — коэффициент при нулевой гармонике в разложении функции  $\alpha(\cos \theta)$  по шаровым функциям,  $\alpha(\cos \theta) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i P_i(\cos \theta)$ ). Интегрируя обе части выражения (45.3)

по всем фононам и всем возможным энергиям, получим

$$\begin{aligned} \int I_{phr}(n) \varepsilon p^2 dp = - \frac{1}{\tau_{phr}} \left\{ v(\cos \theta) - v_0 + \cos \theta w_r + \right. \\ \left. + \beta (v_0 + T_r') + \frac{1}{8} [\alpha(\cos \theta) - \alpha_0] \right\} \int \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \varepsilon^2 p^2 dp, \\ \int I_{phr}(n) p^2 dp = - \frac{\pi^4}{216} \frac{1}{\tau_{phr}} \left\{ v(\cos \theta) - v_0 + \cos \theta w_r + \right. \\ \left. + \frac{8}{9} \beta (v_0 + T_r') + \frac{1}{7} [\alpha(\cos \theta) - \alpha_0] \right\} \int \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \varepsilon p^2 dp. \end{aligned} \quad (45.4)$$

Значение интеграла  $\int I_{3 \rightarrow 2}(n) p^2 dp$  вычислялось в § 16

$$\int I_{3 \rightarrow 2}(n) p^2 dp = \alpha(\cos \theta) \Gamma_{ph}.$$

С учетом (16.6) это выражение можно переписать в следующем виде:

$$\int I_{3 \rightarrow 2}(n) p^2 dp = \frac{-1}{\tau_{3 \rightarrow 2}} \alpha(\cos \theta) \int \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \varepsilon p^2 dp, \quad (45.5)$$

\*) Величиной интеграла столкновений  $I_{phr}(n)$  области температур выше 1,2° К по сравнению с  $I_{phr}(n)$  пренебрегаем.

где  $\tau_{3 \rightarrow 2}$  — время, характеризующее пятифононный процесс,

$$\frac{1}{\tau_{3 \rightarrow 2}} = a \frac{kT'^2}{3N_{ph}} \quad (45.6)$$

( $N_{ph}$  — число фононов в единице объема гелия II).

Подставляя (45.4) и (45.5) в правые части уравнений (45.2), окончательно получаем

$$\begin{aligned} & (\tilde{\omega} - \cos \theta) \left[ v(\cos \theta) + \frac{27}{\pi^4} \alpha(\cos \theta) \right] + \tilde{\omega} u \rho' + \\ & + \cos^2 \theta v_s = \frac{\tilde{\omega}}{i\omega\tau_{phr}} \left\{ v(\cos \theta) - v_0 + \cos \theta w_r + \right. \\ & \left. + \beta(v_0 + T'_r) + \frac{1}{8} [\alpha(\cos \theta) - \alpha_0] \right\}, \\ & (\tilde{\omega} - \cos \theta) \left[ v(\cos \theta) + \frac{5\pi^2}{108} \alpha(\cos \theta) \right] + \tilde{\omega} u \rho' + \cos^2 \theta v_s = \\ & = \frac{\pi^4}{216} \frac{\tilde{\omega}}{i\omega\tau_{phr}} \left\{ v(\cos \theta) - v_0 + \cos \theta w_r + \frac{8}{9} \beta(v_0 + T'_r) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{7} [\alpha(\cos \theta) - \alpha_0] \right\} + \alpha(\cos \theta) \frac{\tilde{\omega}}{i\omega\tau_{3 \rightarrow 2}}. \quad (45.7) \end{aligned}$$

Дальнейшее решение задачи для  $T > 1,2^\circ \text{ K}$  аналогично рассмотренному в § 42 решению ее для  $T < 1,2^\circ \text{ K}$ . Вычисление скорости и поглощения звука в общем случае произвольной величины параметра  $\omega\tau$  очень громоздко, поэтому мы ограничимся рассмотрением только малых частот, удовлетворяющих для первого звука неравенству  $\omega\tau_{phr} \ll 1$ , а для второго звука  $\omega\tau_{phr} \ll u_2/u_1$ . Для первого звука такое рассмотрение практически охватывает все возможные для температур выше  $1,2^\circ \text{ K}$  частоты, поскольку при  $T > 1,2^\circ \text{ K}$   $\omega\tau_{phr}$  всегда меньше единицы.

В результате длинных вычислений уравнения, описывающие распространение первого и второго звуков (42.5) — (42.8), в области малых частот и с учетом только линейных по  $\omega\tau_{phr}$  членов приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} -\tilde{\omega} T'_r + \frac{\rho_s}{\rho} \frac{S}{C} w_r + i\omega\tau_{phr} \frac{S_{ph}}{C} \left\{ \frac{1}{\beta} \frac{\rho_s}{\rho} \left( 1 - 3 \frac{S}{C} \right) + \right. \\ \left. + \left( 1 - \frac{\rho_n c^2}{TS} \right) \left( 1 - \frac{TS}{\rho c^2} \right) \right\} w_r = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\tilde{\omega} w_r + \frac{TS}{\rho_n c^2} T'_r - i\omega\tau_{phr} \frac{\rho_{nph}}{\rho_n} \left\{ \frac{1}{3\beta} \frac{\rho_s}{\rho} \left( 1 - 3 \frac{S}{C} \right) + \right. \\ \left. + \frac{4}{15} \frac{1}{\tilde{\omega}} \frac{\rho_s}{\rho} + \tilde{\omega} \left( 1 - \frac{\rho_n c^2}{TS} \right) \right\} w_r = 0, \quad (45.8) * \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\tilde{\omega} j_r + \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T \rho' - \\ - i\omega\tau_{phr} \frac{\rho_{nph}}{\rho} \left\{ \frac{4}{15} + \frac{1}{3\beta} (3u + 1)^2 \right\} \rho' = 0, \quad (45.9) \\ -\tilde{\omega} \rho' + j_r = 0, \end{aligned}$$

где

$$\frac{1}{\beta} = \left[ \frac{1}{\beta_1} + \left( \frac{27}{\pi^4} - \frac{1}{9} \right) \frac{\tau_{3 \rightarrow 2}}{\tau_{phr}} \right] \left[ 1 + \frac{\frac{1}{8} \left( \frac{\pi^4}{216} - 1 \right)^2}{\frac{\pi^4}{216} \left( \frac{1}{56} \frac{\pi^4}{216} + \frac{\tau_{phr}}{\tau_{3 \rightarrow 2}} \right)} \right]^{-1}$$

$$\frac{1}{\tau_{phr}} = \frac{1}{\tau_{phr}} \left[ 1 + \frac{\frac{1}{8} \left( \frac{\pi^4}{216} - 1 \right)^2}{\frac{\pi^4}{216} \left( \frac{1}{56} \frac{\pi^4}{216} + \frac{\tau_{phr}}{\tau_{3 \rightarrow 2}} \right)} \right]^{-1}. \quad (45.10)$$

Из условий совместности систем (45.8) и (45.9) находим скорости и коэффициенты поглощения первого и второго звуков:

$$u_1 = u_{10}, \quad \alpha_1 = \frac{\omega^2 \tau_{phr}}{c} \frac{\rho_{nph}}{\rho} \left[ \frac{2}{15} + \frac{1}{6\beta} (3u + 1)^2 \right], \quad (45.11)$$

$$\begin{aligned} u_2 = u_{20}, \quad \alpha_2 = \frac{\omega^2 c^2 \tau_{phr}}{u_{20}^3} \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\rho_{nph}}{\rho} \left\{ \frac{2}{15} + \frac{1}{2} \frac{\rho_n}{\rho_s} \frac{\rho c^2}{TC} \left( 1 - \frac{TS}{\rho_n c^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{6\beta} \left( 1 - 3 \frac{S}{C} \right)^2 \right\}. \quad (45.12) \end{aligned}$$

Первые члены в выражениях (45.11) и (45.12) обязаны фононной части коэффициента обычной вязкости

$$\eta_{ph} = \frac{1}{5} c^2 \rho_{nph} \tau_{phr}$$

\*) В (45.8) и (45.9) мы опустили члены с  $(\partial \rho / \partial T)_p$ , поскольку, как уже было сказано в § 43, они существенны только при низких температурах (ниже  $0,9^\circ \text{ K}$ ).

и фононной части коэффициента теплопроводности

$$\kappa_{ph} = c^2 S_{ph} \tilde{\tau}_{phr} \left( 1 - \frac{TS}{\rho_n c^2} \right)^2.$$

Третий член в (45.12) соответствует комбинации из коэффициентов второй вязкости ( $\zeta_2 + \rho^2 \zeta_3 - 2\rho \zeta_1$ ),

$$\rho \zeta_1 = \frac{1}{\beta} (3u + 1) \left( u + \frac{S}{C} \right) c^2 \rho_{nph} \tilde{\tau}_{phr},$$

$$\rho^2 \zeta_3 = \frac{3}{\beta} \left( u + \frac{S}{C} \right)^2 c^2 \rho_{nph} \tilde{\tau}_{phr}.$$

Значение коэффициента  $a$  (45.6) может быть вычислено из экспериментальных значений коэффициента поглощения первого звука в гелии II. Согласно данным Аткинса и Чейза  $a = 3,4 \cdot 10^{43}$ .

Подстановка в (45.11) и (45.12) численных значений всех параметров показывает, что поглощение первого звука определяется второй вязкостью, а второго звука — теплопроводностью.

### § 46. Область температур ниже 0,6° K

В области температур ниже 0,6° K вклад ротонов во все явления становится несущественным и можно рассматривать чисто фононный газ. Уравнения, описывающие распространение звука в фононном газе, согласно (42.3), (42.7) и (42.8) и имеют вид

$$\begin{aligned} -\tilde{\omega}\rho' + j = 0, \quad -\tilde{\omega}j + \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T \rho' + \frac{\rho_{nph}}{\rho} (3uT' + \tilde{\omega}w) = \\ = 0, \\ -\tilde{\omega}T' + \frac{1}{3} \frac{\rho_{sph}}{\rho} w + \tilde{\omega} \frac{3u+1}{3} \rho' = 0, \\ -[2 + (\tilde{\omega} - \tilde{Z}_{ph}) \ln \tilde{a}] T' - \\ - \left( \tilde{\omega} - \frac{\rho_{sph}}{\rho} \tilde{Z}_{ph} \right) (-2 + \tilde{Z}_{ph} \ln \tilde{a}) w + u\tilde{\omega} \ln \tilde{a} \rho' + \\ + \tilde{Z}_{ph} (-2 + \tilde{Z}_{ph} \ln \tilde{a}) j \quad \left( \tilde{a} = \frac{\tilde{Z}_{ph} + 1}{\tilde{Z}_{ph} - 1} \right). \quad (46.1) \end{aligned}$$

В (46.1) мы ввели обозначения

$$j = \left| \frac{\rho_{sph}}{\rho} v_s \right| + \frac{\rho_{nph}}{\rho} v_n, \quad \frac{\rho_{sph}}{\rho} = 1 - \frac{\rho_{nph}}{\rho},$$

$v_0 = -T$ ,  $v_1 = -w$  ( $T'$  и  $w = |v_n - v_s|$  — отношения отклонения температуры и относительной скорости, определенных для равновесного состояния гелия II, соответственно к  $T_0$  и  $c$ ). Соотношения  $v_0 = -T'$  и  $v_1 = -w$  вытекают из требования, состоящего в том, что

$$\int \varepsilon (n - n^0) d\tau_x = 0, \quad \int p (n - n^0) d\tau_p = 0,$$

т. е. что неравновесная функция распределения фононов  $n$  должна приводить к таким же значениям полной энергии и полного импульса, какие дает равновесная функция

$$n^0 = \left( e^{\frac{\varepsilon - (p, v_n - v_s)}{kT}} - 1 \right)^{-1}. \quad (46.2)$$

Условие совместности системы (46.1) заключается в равенстве нулю ее определителя. Раскрывая указанный определитель, получим уравнение, которое при учете только линейных по  $\rho_{nph}/\rho$  членов распадается на два уравнения

$$\begin{aligned} \left( \frac{\omega}{k} \right)^2 - u_{10}^2 + c^2 \frac{\rho_{nph}}{\rho} \varphi(Z_{ph}) = 0, * \\ \varphi(Z_{ph}) = 1 - 3 \frac{u^2 \ln a + \{2u + 1 + 3u^2(1 - Z_{ph})\}(-2 + Z_{ph} \ln a)}{2 + (1 - Z_{ph}) \ln a + 3(1 - Z_{ph})(-2 + Z_{ph} \ln a)} \quad (46.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left( a = \frac{Z_{ph} + 1}{Z_{ph} - 1} \right), \\ 2 + (\tilde{\omega} - \tilde{Z}_{ph}) \ln \tilde{a} + 3\tilde{\omega}(\tilde{\omega} - \tilde{Z}_{ph})(-2 + Z_{ph} \ln \tilde{a}) - \\ - 3 \frac{\rho_{nph}}{\rho} \frac{u^2 + 2u\tilde{\omega} + \tilde{\omega}^2}{\tilde{\omega}^2 - 1} (-2 + \tilde{Z}_{ph} \ln \tilde{a}) = 0. \quad (46.4) \end{aligned}$$

\* Поскольку последнее слагаемое в уравнении (46.3) много меньше первого и  $u_{10} \simeq c$ , то в функции  $\varphi(Z_{ph})$  мы всюду полагаем  $\tilde{\omega} = 1$ .

Первое уравнение определяет комплексную скорость обычного звука, скорость и коэффициент поглощения которого равны

$$u_1 = u_{10} - \frac{1}{2} c \frac{\rho_{nph}}{\rho} \operatorname{Re} \varphi(Z_{ph}), \quad (46.5)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \frac{\omega}{c} \frac{\rho_{nph}}{\rho} \operatorname{Im} \varphi(Z_{ph}). \quad (46.6)$$

Нетрудно убедиться в том, что полученные выражения для  $u_1$  и  $\alpha_1$ , так же, как и (43.6) и (43.7), являются следствием более общих формул (43.15) и (43.16).

Второе уравнение (46.4) имеет незатухающее звуковое решение только в области малых частот, удовлетворяющих условию  $\omega \tau_{ph} \ll 1/\sqrt{3}$ . В этой области частот выражения  $\ln \tilde{a}$  и  $(-2 + \tilde{Z}_{ph} \ln \tilde{a})$  можно разложить в степенной ряд по величине  $1/\tilde{Z}_{ph}$  (43.8), в результате чего (46.4) приобретает вид

$$\left(\frac{\omega}{k}\right)^2 = \frac{c^2}{3} \left[ 1 - \frac{3}{2} (3u^2 + 2u + 1) \frac{\rho_{nph}}{\rho} - \frac{4}{5} i \omega \tau_{ph} \right].$$

Корень этого уравнения определяет комплексную скорость, а следовательно, скорость и коэффициент поглощения второго звука

$$u_2 = \frac{c}{\sqrt{3}} \left[ 1 - \frac{3}{4} (3u^2 + 2u + 1) \frac{\rho_{nph}}{\rho} \right],$$

$$\alpha_2 = \frac{2\sqrt{3}}{5} \frac{\omega^2 \tau_{ph}}{c}.$$

Как и следовало ожидать, в чисто фононном газе величина  $u_2$  при низких температурах стремится к пределу  $c/\sqrt{3}$ , а поглощение его зависит только от коэффициента обычной вязкости \*)

$$\eta_{ph} = \frac{1}{5} c^2 \rho_{nph} \tau_{ph}. \quad (46.7)$$

\*) Как мы увидим в § 47, в фононном газе все кинетические коэффициенты, кроме  $\eta_{ph}$  (47.7), равны нулю.

В области малых частот,  $\omega \tau_{ph} \ll 1$ , скорость и коэффициент поглощения первого звука согласно (46.5) и (46.6) равны

$$u_1 = u_{10} + c \frac{1}{4} (3u + 1)^2 \frac{\rho_{nph}}{\rho},$$

$$\alpha_1 = \frac{3}{10} (u + 1)^2 \frac{\omega^2 \tau_{ph}}{c} \frac{\rho_{nph}}{\rho}.$$

В чисто фононном газе  $u_{10} = c \left[ 1 - \frac{3}{2} \left( u^2 - \frac{1}{4} \frac{\rho^2}{c} \frac{\partial^2 c}{\partial \rho^2} \frac{\rho_{nph}}{\rho} \right) \right]$  и, следовательно, при  $T = 0$ , как и должно быть,  $u_1 = c$ . Поглощение обычного звука обязано коэффициенту обычной вязкости (46.7). Член  $(u + 1)^2$  возник благодаря тому, что в уравнениях (46.1) мы учли производную  $(\partial \rho / \partial T)_P$  ( $\delta = -3u - 1$ ).

Для больших частот,  $\omega \tau_{ph} \gg 1$ ,

$$u_1 = u_{10} + c \frac{\rho_{nph}}{\rho} \left\{ \frac{3}{4} (u + 1)^2 \ln(2\omega \tau_{ph}) - 3u - 2 \right\}, \quad (46.8)$$

$$\alpha_1 = \frac{3}{4} \pi (u + 1) \frac{\omega}{c} \frac{\rho_{nph}}{\rho}. \quad (46.9)$$

Как уже указывалось в § 42, в области очень больших частот,  $\frac{1}{\omega \tau_{ph}} \ll 3\gamma \left( 2\pi \frac{kT}{c} \right)^2 \frac{B_3}{B_2}$ , в выражении для энергии  $\epsilon$ , входящей в уравнения (42.5), (42.7), и (42.8), следует учесть и кубические по импульсам члены. Учет  $\gamma p^2$  дает следующие формулы для  $u_1$  и  $\alpha_1$  \*):

$$u_1 = u_{10} - c \frac{\rho_{nph}}{\rho} \left\{ \frac{3}{4} (u + 1)^2 \ln \left[ \frac{3}{2} \gamma \left( 2\pi \frac{kT}{c} \right)^2 \frac{B_3}{B_2} \right] + 3u + 2 \right\}, \quad (46.10)$$

$$\alpha_1 = \frac{3}{4} (u + 1)^2 \frac{\rho_{nph}}{\rho} \left[ 3\gamma \left( 2\pi \frac{kT}{c} \right)^2 \frac{B_3}{B_2} c \tau_{ph} \right]^{-1}. \quad (46.11)$$

\*) В § 42 был рассмотрен случай предельно высоких частот, для которых  $\omega \tau_{ph} \gg 1$ .

## § 47. Кинетические коэффициенты

В предыдущих разделах при вычислении коэффициентов поглощения первого и второго звуков для малых частот мы получали некоторую линейную комбинацию из кинетических коэффициентов. В этом разделе мы займемся получением формул для каждого из этих коэффициентов в отдельности.

Уравнения (42.25) — (42.28), (42.30) и (42.31), описывающие распространение звука в гелии II, в области малых частот \*) имеют вид:

$$\begin{aligned} -\frac{\omega}{k} \rho' + j_r - ikc^2 \rho_{nph} \tau_{phr} \left(1 - \frac{TS}{\rho_n c^2}\right) \frac{T_r}{T} &= 0, \\ -\frac{\omega}{k} j_r + \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_T \rho' + \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_\rho T_r' - \frac{4/15}{1 + \tau_{phr}/\tau_{ph}} \times \\ &\times ikc^2 \rho_{nph} \tau_{phr} v_{nr} + i\omega c^2 \rho_{nph} \tau_{phr} \left(1 - \frac{TS}{\rho_n c^2}\right) \frac{T_r}{T} - \\ - ikc^2 \rho_{nph} \tau_{phr} \left\{ \frac{1}{\beta \rho} (3u + 1) \left(u + \frac{S}{C} + \delta \frac{S_{ph}}{C}\right) (j_r - \rho v_{nr}) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{3\beta} (3u + 1) \left(3u + 1 + \delta \frac{C_{ph}}{C}\right) v_{nr} \right\} = 0, \\ -\frac{\omega}{k} v_s + \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho}\right)_T \rho + \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_\rho T_r' - ikc^2 \rho_{nph} \tau_{phr} \left\{ \frac{3u}{\beta \rho^2} \left(u + \frac{S}{C} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \delta \frac{S_{ph}}{C}\right) (j_r - \rho v_{nr}) + \frac{u}{\beta \rho} \left(3u + 1 + \delta \frac{C_{ph}}{C}\right) v_{nr} \right\} = 0, \\ -\frac{\omega}{k} \left(\frac{\partial S}{\partial \rho}\right)_T \rho' - \frac{\omega}{k} \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_\rho T_r' + S v_{nr} - ik \tau_{phr} c^2 S_{ph} \times \\ &\times \left(1 - \frac{TS}{\rho_n c^2}\right) \frac{T_r}{T} + i\omega \tau_{phr} C_{ph} \left\{ \frac{1}{\beta \rho} \left(u + \frac{S}{C} + \delta \frac{S_{ph}}{C}\right) \times \right. \\ &\left. \times (j_r - \rho v_{nr}) + \frac{1}{3\beta} (3u + 1 + \delta \frac{C_{ph}}{C}) v_{nr} \right\} = 0, \end{aligned} \quad (47.1)$$

\*) Напомним, что малые частоты для первого звука удовлетворяют условию  $\omega \tau_{ph}, \omega \tau_{phr} \ll 1$ , для второго — условию  $\omega \tau_{ph}, \omega \tau_{phr} \ll u_2/u_1$ .

где  $T_r'$  и  $v_{nr}$  — температура и скорость нормальной части ротонного газа, а  $j_r = |\rho_s v_s + \rho_n v_{nr}|$ , величины  $\rho'$  и  $v_s'$  играют роль внешних условий для газа возмущений.

Приведем систему (47.1) к виду гидродинамических уравнений. Для этого воспользуемся условиями

$$\left. \begin{aligned} \int \varepsilon (n - n^0) d\tau_p + \int \mathcal{E} (N - N^0) d\tau_P &= 0 \\ \int p (n - n^0) d\tau_p + \int P (N - N^0) d\tau_P &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (47.2)$$

вытекающими из требования, состоящего в том, что неравновесные функции  $n$  и  $N$  должны приводить к таким значениям полной энергии и полного импульса, какие дают равновесные функции  $n^0$  (46.2) и

$$N^0 = e^{-\frac{\varepsilon - (P, v_n - v_s)}{kT}}.$$

Здесь температура  $T$  и скорость нормальной части жидкости  $v_n$  относятся к равновесному состоянию гелия II. Отклонение равновесных функций  $n^0$  и  $N^0$  от их значений в неподвижной жидкости  $n_0$  и  $N_0$  равны \*)

$$\left. \begin{aligned} n^{0'} &= \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \left[ \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \rho' - \varepsilon \frac{T_r'}{T} - \cos \theta p (v_n - v_s) \right] \\ N^{0'} &= \frac{\partial N_0}{\partial \mathcal{E}} \left[ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho} \rho' - \mathcal{E} \frac{T_r'}{T} - \cos \theta P (v_n - v_s) \right] \end{aligned} \right\} \quad (47.3)$$

Подставляя в (47.2)  $n, N, n^0$  и  $N^0$  в виде сумм постоянных равновесных значений  $n_0, N_0$  и небольших добавок  $n'$  (42.9),  $N'$  (42.10) и  $n^{0'}, N^{0'}$  (47.3), получим

$$\begin{aligned} \rho_n v_{nr} &= \rho_n v_n + ikc^2 \rho_{nph} \tau_{phr} \left(1 - \frac{TS}{\rho_n c^2}\right) \frac{T_r'}{T}, \\ \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_\rho T_r' &= \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_\rho T' + ik S_{ph} \tau_{phr} \left\{ \frac{3}{\beta \rho} \left(u + \frac{S}{C} + \delta \frac{S_{ph}}{C}\right) \times \right. \\ &\times (j_r - \rho v_{nr}) + \frac{1}{\beta} \left(3u + 1 + \delta \frac{C_{ph}}{C}\right) v_{nr} \left. \right\}. \end{aligned} \quad (47.4)$$

\*) Индекс нуль у постоянных равновесных значений температуры и плотности опускаем.

С помощью выражений (47.4) система уравнений (47.1) после незначительных преобразований приводится к виду

$$-\frac{\omega}{k} \rho' + j = 0, \quad (47.5)$$

$$-\frac{\omega}{k} j + P' = ikc^2 \rho_{nph} \tau_{phr} \left\{ \frac{1}{\beta} \left( 3u + 1 + \delta \frac{C_{ph}}{C} \right) \times \right. \\ \times \left( u + \frac{S}{C} + \delta \frac{S_{ph}}{C} \right) (j - \rho v_n) + \\ \left. + \left[ \frac{4/15}{1 + \tau_{phr}/\tau_{ph}} + \frac{1}{3\beta} \left( 3u + 1 + \delta \frac{C_{ph}}{C} \right)^2 \right] v_n \right\}, \quad (47.6)$$

$$-\frac{\omega}{k} v_s + \mu' = ikc^2 \rho_{nph} \tau_{ph} \left\{ \frac{3}{\beta^2} \left( u + \frac{S}{C} + \delta \frac{S_{ph}}{C} \right)^2 \times \right. \\ \times (j - \rho v_n) + \frac{1}{\beta} \left( 3u + 1 + \delta \frac{C_{ph}}{C} \right) \left( u + \frac{S}{C} + \delta \frac{S_{ph}}{C} \right) v_n \right\}, \quad (47.7)$$

$$-\frac{\omega}{k} S' + S v_n = ikc^2 S_{ph} \tau_{phr} \left( 1 - \frac{TS}{\rho_n c^2} \right)^2 \frac{T'}{T}, \quad (47.8)$$

где  $S'$ ,  $P'$ ,  $\mu'$ , а также  $j = |\rho_s v_s + \rho_n v_n|$  относятся к равновесному состоянию гелия II.

Записанные в таком виде уравнения позволяют нам определить кинетические коэффициенты, входящие в уравнения гидродинамики \*)

$$\rho' + \operatorname{div} j = 0, \quad (47.9)$$

$$j + \nabla P' = \frac{4}{3} \eta \Delta v_n + \nabla \{ \zeta_1 \operatorname{div} (j - \rho v_n) + \zeta_2 \operatorname{div} v_n \}, \quad (47.10)$$

$$\dot{v}_s + \nabla \mu = \nabla \{ \zeta_3 \operatorname{div} (j - \rho v_n) + \zeta_4 \operatorname{div} v_n \}, \quad (47.11)$$

$$\dot{S}' + S \operatorname{div} v_n = \kappa \frac{\Delta T'}{T}. \quad (47.12)$$

Так, из сравнения правых уравнений (47.8) и (47.12), а также (47.7) и (47.11) находим коэффициент теплопроводности \*\*)

$$\kappa_{ph} = c^2 S_{ph} \tau_{phr} \left( 1 - \frac{TS}{\rho_n c^2} \right)^2 \quad (47.13)$$

\*) Система уравнений (47.9)–(47.12) записана в линейном приближении.

\*\*) Естественно, что таким путем мы находим только фоновую часть коэффициента теплопроводности и фоновую часть коэффициента обычной вязкости.

и коэффициенты второй вязкости

$$\rho^2 \zeta_3 = \frac{3}{\beta} \left( u + \frac{S}{C} + \delta \frac{S_{ph}}{C} \right)^2 c^2 \rho_{nph} \tau_{phr}, \quad (47.14)$$

$$\rho \zeta_4 = \frac{1}{\beta} \left( 3u + 1 + \delta \frac{C_{ph}}{C} \right) \left( u + \frac{S}{C} + \delta \frac{S_{ph}}{C} \right) c^2 \rho_{nph} \tau_{phr}. \quad (47.15)$$

Для того чтобы отличить в (47.6) коэффициент обычной вязкости  $\eta_{ph}$  от коэффициента второй вязкости  $\zeta_2$ , заметим, что вторая вязкость, как уже говорилось, обусловлена сравнительно медленными процессами установления энергетического равновесия между фононным и ротонным газами, поэтому в уравнении (47.6) параметр  $\beta$  должен содержать только коэффициенты второй вязкости  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$ . Учитывая это, из (47.6) и (47.10), получаем, что

$$\eta_{ph} = \frac{1/5}{1 + \tau_{phr}/\tau_{ph}} c^2 \rho_{nph} \tau_{phr}, \quad (47.16)$$

$$\rho \zeta_1 = \frac{1}{\beta} \left( 3u + 1 + \delta \frac{C_{ph}}{C} \right) \left( u + \frac{S}{C} + \delta \frac{S_{ph}}{C} \right) c^2 \rho_{nph} \tau_{phr}, \quad (47.17)$$

$$\zeta_2 = \frac{1}{3\beta} \left( 3u + 1 + \delta \frac{C_{ph}}{C} \right)^2 c^2 \rho_{nph} \tau_{phr}. \quad (47.18)$$

$\zeta_1$  и  $\zeta_4$  оказались равными, как и следовало ожидать, из принципа симметрии Онзагера для кинетических коэффициентов. В рассматриваемом нами приближении между коэффициентами второй вязкости имеется еще одна связь

$$\zeta_1^2 = \zeta_2 \zeta_3. \quad (47.19)$$

В то время, как  $\zeta_1 = \zeta_2$  является строгим равенством, следующим из принципа симметрии Онзагера, полученное равенство (47.19) является результатом того, что в теории учитываются лишь медленные процессы установления равновесия, происходящие в фононном газе. Получается любопытная ситуация: если

$$\operatorname{div} v_n = - \frac{3(u + S/C + \delta S_{ph}/C)}{3u + 1 + \delta C_{ph}/C} \operatorname{div} (j - \rho v_n),$$

то такое движение не сопровождается диссипацией энергии. В некотором смысле эта ситуация напоминает ситуацию в одноатомном газе, где вторая вязкость строго равна нулю.

Полученные выше формулы для кинетических коэффициентов справедливы для всей области температур ниже  $1,2^\circ \text{K}$ . В области температур от  $0,6^\circ \text{K}$  до  $0,9^\circ \text{K}$ , как уже указывалось, в уравнениях, описывающих распространение звука в гелии II, следует учесть члены, содержащие интеграл столкновений  $I_{ph}(n)$  и производную  $\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P \sim \delta$ .

Учитывая это, легко получить, что

$$\begin{aligned}\eta_{ph} &= \frac{1}{5} c^2 \rho_{nph} \tau_{phr}, \\ \rho \zeta_1 &= \rho \zeta_4 = \frac{1}{\beta} (3u + 1) \left(u + \frac{S}{C}\right) c^2 \rho_{nph} \tau_{phr}, \\ \rho^2 \zeta_3 &= \frac{3}{\beta} \left(u + \frac{S}{C}\right)^2 c^2 \rho_{nph} \tau_{phr}, \\ \zeta_3 &= \frac{1}{3\beta} (u + 1)^2 c^2 \rho_{nph} \tau_{phr}, \\ \zeta_1^2 &= \zeta_2 \zeta_3,\end{aligned}$$

а  $\kappa_{ph}$  — по-прежнему определяется формулой (47.13).

В чисто фоновом газе ( $T < 0,6^\circ \text{K}$ ) уравнения (46.1) описывающие распространение звука с помощью условий (47.2)  $\left(v_0 = -\frac{T'}{T}, v_1 = -\frac{w}{c}\right)$ , преобразуются в области малых частот к виду

$$\begin{aligned}-\frac{\omega}{k} \rho' + j &= 0, \\ -\frac{\omega}{k} j + P' &= ik \frac{4}{15} c^2 \rho_{nph} \tau_{phr} v_n, \\ -\frac{\omega}{k} v_s + \mu' &= 0, \\ -\frac{\omega}{k} S' + S v_n &= 0,\end{aligned}$$

откуда видно, что при  $T < 0,6^\circ \text{K}$  все кинетические коэффициенты, за исключением

$$\eta_{ph} = \frac{1}{5} c^2 \rho_{nph} \tau_{phr},$$

равны нулю \*).

В области относительно высоких температур, выше  $1,2^\circ \text{K}$ , как уже указывалось, наряду с рассеянием фононов ротонами следует учитывать и пятифононный процесс. Учет этих двух медленных процессов рассеяния дает следующую связь между равновесными и роторными величинами температуры и относительной скорости

$$\begin{aligned}\rho_n w_r &= \rho_n w + ikc^2 \rho_{nph} \tilde{\tau}_{phr} \left(1 - \frac{TS}{\rho_n c^2}\right) \frac{T'_r}{T}, \\ \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_\rho T'_r &= \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_\rho T' + \\ &+ ikS_{ph} \tilde{\tau}_{phr} \left\{ \frac{3}{\beta \rho} \left(u + \frac{S}{C}\right) (j - \rho v_n) + \frac{1}{\beta} (3u + 1) v_n \right\}. \quad (47.20)\end{aligned}$$

Здесь  $\tilde{\tau}_{phr}$  и  $\tilde{\beta}$  определяются формулами (45.10). С помощью (47.20) уравнения (45.8) и (46.9) можно привести к виду (47.8) — (47.12) и легко получить, что

$$\begin{aligned}\kappa_{ph} &= c^2 S_{ph} \tilde{\tau}_{phr} \left(1 - \frac{TS}{\rho_n c^2}\right)^2, \\ \eta_{ph} &= \frac{1}{5} c^2 \rho_{nph} \tilde{\tau}_{phr}, \quad \zeta_1^2 = \zeta_2 \zeta_3, \\ \rho \zeta_1 &= \rho \zeta_4 = \frac{1}{\beta} (3u + 1) \left(u + \frac{S}{C}\right) c^2 \rho_{nph} \tilde{\tau}_{phr}, \quad (47.21) \\ \zeta_2 &= \frac{1}{3\beta} (3u + 1)^2 c^2 \rho_{nph} \tilde{\tau}_{phr}, \\ \rho^2 \zeta_3 &= \frac{3}{\beta} \left(u + \frac{S}{C}\right)^2 c^2 \rho_{nph} \tilde{\tau}_{phr}.\end{aligned}$$

Подстановка численных значений параметров показывает, что членом  $TS/\rho_n c^2$  в коэффициенте теплопровод-

\*) Равенство нулю коэффициентов теплопроводности и второй вязкости в чисто фоновом газе следует также из формул (47.13) и (47.15), поскольку при  $T < 0,6^\circ \text{K}$   $\delta = -3u - 1$ .

ности можно пренебречь при всех температурах выше  $0,8^\circ \text{K}$ .

Полученные выше формулы для фононной части коэффициентов обычной вязкости и теплопроводности во всей рассматриваемой области температур совпадают с теми, которые были вычислены ранее.

#### § 48. Звук в жидком гелии II вблизи абсолютного нуля [29]

Рассмотрим явление распространения звука в жидком гелии II вблизи абсолютного нуля.

Вблизи абсолютного нуля длина свободного пробега возбуждений быстро возрастает и может превосходить длину волны звука. В этой области температур существенную роль играют только фононы, а вкладом ротонов можно пренебречь. При этом равновесие в фононном газе, естественно, не успевает устанавливаться. Такая ситуация будет осуществляться вблизи абсолютного нуля, когда выполнено неравенство  $\omega t_{ph} \gg 1$ . Этот случай отличается от рассмотренного в § 23, где предполагалось выполненным противоположное неравенство  $\omega t_{ph} \ll 1$ . Очевидно, что в таких условиях уравнения гидродинамики для газа возбуждений уже неприменимы. Свойства такого газа описываются кинетическим уравнением, в котором столкновительный член пренебрежимо мал. Таким образом, функция распределения фононов  $n(p, r, t)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial r} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial n}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial r} = 0; \quad (48.1)$$

здесь  $H = \varepsilon(p) + p v_s$ ,  $\varepsilon$  — энергия фонона, зависящая от плотности, с учетом дисперсии равная

$$\varepsilon(p) = c p (1 - \gamma p^2). \quad (48.2)$$

Величины  $\rho$  и  $v_s$ , играющие роль внешних условий для фононов, определяются двумя уравнениями (см. (37.12), (37.8)):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \left( \rho v_s + \int p n d\tau_p \right) = 0, \quad (48.3)$$

и

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} + \nabla \left( \mu_0 + \frac{v_s^2}{2} + \int \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} n d\tau_p \right) = 0, \quad (48.4)$$

где  $\mu_0$  — значение химического потенциала при абсолютном нуле, а  $p$  — импульс возбуждения в системе отсчета, в которой  $v_s = 0$ . Положим  $n = n_0 + n'$ ,  $\rho = \rho_0 + \rho'$ ,  $n_0$  и  $\rho_0$  — равновесные значения, а  $n'$ ,  $\rho'$ ,  $v_s$  — малые величины, изменяющиеся по закону  $\exp(-i\omega t + ikr)$ . Линеаризовав уравнения (48.1), (48.3) и (48.4), получим следующую систему:

$$\left. \begin{aligned} (\omega - kv) n' + vk \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \rho' + p v_s \right) &= 0, \\ \omega \rho' - k v_s \rho - k \int p n' d\tau &= 0, \\ -\omega v_s + k \left( \frac{c^2}{\rho} + \int n_0 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial p^2} d\tau \right) \rho' + k \int \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} n' d\tau &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (48.5)$$

Здесь  $v = \partial \varepsilon / \partial p$  и использован тот факт, что согласно тождеству (17.26)  $d\mu_0 = dp_0 / \rho = c^2 dp / \rho$  \*).

Обозначим угол между векторами  $k$  и  $p$  через  $\theta$  и разделим первое из уравнений (48.5) относительно  $n'$ :

$$n' = - \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} p \frac{v \cos \theta}{\omega/k - v \cos \theta} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \rho' + v_s \cos \theta \right). \quad (48.6)$$

\*) Вообще говоря, подобно тому как это имеет место в теории ферми-жидкости, существует зависимость функционального вида энергии возбуждения от плотности возбуждений  $\delta \varepsilon = \int f \delta n d\tau$ .

В главном порядке эта зависимость уже учтена в члене  $\delta \varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \rho'$ .

Действительно, квадратичные по функции распределения члены в полной энергии возникнут из кубических по  $\rho'$  членов в гамильтониане фононов во втором приближении теории возмущений и из члена  $(\rho')^4$  в первом приближении.

Члены в  $\delta \varepsilon$ , обязанные второму приближению теории возмущений, будут вида  $\int f n' d\tau'$  с  $f \sim \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right)^2 \frac{1}{1 - \cos \chi}$ , где  $\chi$  — угол, образованный импульсами фононов  $p$  и  $p'$ . Легко видеть, что такого вида функция  $f$  дает такой же эффект в  $\delta \varepsilon$ , как и тот, который мы получаем из системы уравнений (48.7).



Подставив  $n'$  в два других уравнения (48.5), после интегрирования по  $\theta$  получим

$$\left. \begin{aligned} & \left[ -\frac{\omega}{k} - \frac{\partial c}{\partial p} \int_0^\infty \frac{p^4 dp}{4\pi^2 \hbar^3} \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} \left( \frac{\omega}{kv} \right)^2 \ln \frac{\omega + kv}{\omega - kv} \right] v_s + \\ & + \left[ \frac{c^2}{\rho} - \left( \frac{\partial c}{\partial p} \right)^2 \int_0^\infty \frac{p^4 dp}{4\pi^2 \hbar^3} \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} \left( \frac{\omega}{kv} \right) \ln \frac{\omega + kv}{\omega - kv} \right] \rho' = 0, \\ & \left[ \rho - \int_0^\infty \frac{p^4 dp}{4\pi^2 \hbar^3} \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} \left( \frac{\omega}{kv} \right)^3 \ln \frac{\omega + kv}{\omega - kv} \right] v_s - \\ & - \left[ \frac{\omega}{k} + \frac{\partial c}{\partial p} \int_0^\infty \frac{p^4 dp}{4\pi^2 \hbar^3} \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} \left( \frac{\omega}{kv} \right)^2 \ln \frac{\omega + kv}{\omega - kv} \right] \rho' = 0. \end{aligned} \right\} (48.7)$$

При этом мы сохраняем лишь большие логарифмические члены; логарифм окажется большим, как мы увидим, поскольку  $\omega \approx kc$ , а  $v \approx c$ .

Условие совместности уравнений (48.7) дает нам дисперсионное уравнение

$$\left( \frac{\omega}{ck} \right)^2 - 1 = - \int_0^\infty \frac{p^4 dp}{4\pi^2 \hbar^3 \rho} \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} \ln \frac{\omega + kv}{\omega - kv} \left( \frac{\rho}{c} \frac{\partial c}{\partial p} + 1 \right)^2. \quad (48.8)$$

Отсюда для низких температур после несложного интегрирования получим

$$\delta c = \frac{\omega}{k} - c = \frac{\pi^2}{30 \hbar^3 \rho} \left( \frac{kT}{c} \right)^4 \left( \frac{\rho}{c} \frac{\partial c}{\partial p} + 1 \right)^2 \ln \left[ \frac{2}{27\gamma} \left( \frac{c}{kT} \right)^2 \right]. \quad (48.9)$$

Таким образом, скорость звука при низких температурах больше, чем при абсолютном нуле, на величину  $\delta c$ , определяемую формулой (48.9). С логарифмической точностью этот результат совпадает с (46.10).

## ГЛАВА XII

### ТЕПЛООБМЕН МЕЖДУ ТВЕРДЫМ ТЕЛОМ И СВЕРХТЕКУЧИМ ГЕЛИЕМ [30]

Необычный характер теплопередачи в гелии II ответствен за ряд своеобразных явлений, происходящих на границе между твердым телом и жидким гелием II. П. Л. Капица обнаружил, что при выделении тепла в твердом теле, находящемся в контакте с жидким гелием II, возникает постоянная разность температур между твердым телом и гелием II. Величина этой разности оказывается пропорциональной потоку выделяемого тепла. В тех же опытах было показано, что скачок локализован в узком пристенном слое жидкости, толщина которого меньше  $10^{-3}$  см. Величина теплосопrotivления, равная отношению разности температур к потоку выделяемого тепла, в опытах Капицы возрастала с убыванием температуры по кубическому закону. Это весьма интересное явление, называемое обычно в литературе температурным скачком Капицы, в последнее время исследовалось различными авторами. Качественно картина у всех авторов совпадает с наблюдаемой Капицей.

Мы обсудим в этом разделе возможные механизмы теплообмена между твердым телом и гелием II.

Для этого рассмотрим твердое изотропное тело, заполняющее одну половину пространства и граничащее с гелием II, заполняющим вторую половину пространства. Пусть температура твердого тела равна  $T'$ , а температура гелия II равна  $T$ . Наша задача состоит в том, чтобы определить поток тепла, возникающий между указанными телами. Теплообмен между твердым телом и гелием II может осуществляться двумя способами; а) передачей энергии при соударениях фононов и ротонов с твердой

стенкой; б) излучением энергии колеблющейся поверхностью твердого тела (излучением фононов). Затрудненность теплообмена между твердым телом и гелием II можно качественно понять, если учесть значительное различие в скоростях звука в твердом теле и жидком гелии II (скорость звука в гелии II на порядок меньше скорости звука в твердых телах). Благодаря такому различию импульсы фононов в твердом теле и жидком гелии II той же температуры будут заметно отличаться. Последнее обстоятельство не позволяет фононам из твердого тела переходить в жидкий гелий II (и обратно), так как при таком превращении невозможно одновременно удовлетворить законам сохранения импульса и энергии.

Мы покажем, что основным механизмом, определяющим теплообмен между твердым телом и жидким гелием II, является излучение (и поглощение) энергии границей твердого тела, совершающей тепловые колебания. Возникающий на границе между твердым телом и гелием II поток энергии оказывается пропорциональным разности четвертых степеней температуры указанных тел.

Для того чтобы приступить к вычислению эффектов теплообмена, необходимо предварительно произвести квантование упругих волн в твердом теле, заполняющем полупространство.

### § 49. Квантование упругих волн [30]

В твердом теле возможны три типа упругих колебаний: продольные, поперечные и поверхностные.

**Продольные волны.** Жидкий гелий II обладает весьма малой плотностью по сравнению с твердым телом. Поэтому граница твердое тело — жидкий гелий II по своим свойствам не будет отличаться от границы твердое тело — вакуум. При отражении от границы твердое тело, — вакуум продольной волны, падающей в плоскости  $xz$  (ось  $z$  — по нормали к границе), возникают две отраженные волны: продольная и поперечная. Из соображений симметрии следует, что вектор смещения в поперечной отраженной волне, так же как и сама волна, будет лежать в плоскости  $xz$ . Полное смещение в твердом

теле равно

$$u = (A_0 n_0 e^{ik_0 r} + A_l n_l e^{ik_l r} + A_t [a n_t] e^{ik_t r}) e^{-i\omega t}, \quad (49.1)$$

$A_0, A_l, A_t$  и  $n_0, n_l, n_t$  — амплитуды и единичные векторы вдоль направлений падающей продольной и отраженных продольной и поперечной волн соответственно;  $a$  — единичный вектор, перпендикулярный к плоскости  $xz$ ;  $k_0 = = k_l = \omega/c_l$ ;  $k_t = \omega/c_t$ . Угол падения  $\theta_0$  и угол отражения продольной  $\theta_l$  и поперечной  $\theta_t$  волн связаны соотношениями:

$$\theta_0 = \theta_l, \quad c_t^2 \sin \theta_0 = c_l \sin \theta_t. \quad (49.2)$$

Компоненты вектора смещения  $u$  равны:

$$u_z = (\cos \theta_0 A_0 e^{ik_0 r} - \cos \theta_l A_l e^{ik_l r} - \sin \theta_t A_t e^{ik_t r}) e^{-i\omega t}, \quad (49.3)$$

$$u_x = (\sin \theta_0 A_0 e^{ik_0 r} + \sin \theta_l A_l e^{ik_l r} - \cos \theta_t A_t e^{ik_t r}) e^{-i\omega t}. \quad (49.4)$$

Вычислим далее компоненты тензора деформации  $u_{ik}$  и тензора напряжений

$$\sigma_{ik} = 2\rho c_t^2 u_{ik} + \rho (c_l^2 - 2c_t^2) u_{il} \delta_{ik}$$

( $\rho$  — плотность тела).

Граничные условия на границе твердое тело — вакуум дают два условия  $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = 0$ , связывающие амплитуды  $A_l, A_t$  с амплитудой  $A_0$ . Таким образом, находим

$$A_l = A_0 \frac{c_t^2 \sin 2\theta_t \sin 2\theta_0 - c_l^2 \cos^2 2\theta_t}{c_t^2 \sin 2\theta_l \sin 2\theta_0 + c_l^2 \cos^2 2\theta_t} \quad (49.5)$$

и

$$A_t = -A_0 \frac{2c_l c_t \sin 2\theta_0 \cos 2\theta_t}{c_t^2 \sin 2\theta_l \sin 2\theta_0 + c_l^2 \cos^2 2\theta_t}. \quad (49.6)$$

Подставив (49.5) и (49.6) в (49.3), найдем величину  $z$ -компоненты вектора смещения на поверхности раздела твердое тело — вакуум:

$$u_{zl} = A_0 \frac{2c_l^2 \cos \theta_0 \cos 2\theta_t}{c_t^2 \sin 2\theta_l \sin 2\theta_0 + c_l^2 \cos^2 2\theta_t} e^{-i\omega t}. \quad (49.7)$$

**Поперечные волны.** При отражении от границы твердое тело — вакуум падающей в плоскости  $xz$  поперечной волны возникают две отраженные волны: поперечная и продольная. Возможны два случая: или направления колебаний в падающей поперечной волне лежат в плоскости падения  $xz$ , или указанные колебания совершаются в направлении, перпендикулярном к этой плоскости. Пусть направление колебаний поперечной волны лежит в плоскости падения, тогда и в отраженной поперечной волне, как это видно из соображений симметрии, направление колебаний лежит в той же плоскости. Вектор смещения в этом случае равен

$$u = ([an_0] A_0 e^{ik_0 r} + A_t n_t e^{ik_t r} + A_l [an_l] e^{ik_l r}) e^{-i\omega t} \quad (49.8)$$

( $n_0$  — единичный вектор в направлении падающей поперечной волны,  $A_0$  — соответствующая амплитуда).

Угол падения  $\theta_0$  и угол отражения продольной волны  $\theta_l$  и поперечной волны  $\theta_t$  связаны соотношениями:

$$\theta_0 = \theta_t, \quad c_t \sin \theta_t = c_l \sin \theta_0. \quad (49.9)$$

Так же как и для случая падающей продольной волны, граничные условия позволяют выразить амплитуды  $A_t$  и  $A_l$  через амплитуды  $A_0$ : имеем

$$A_t = A_0 \frac{c_t^2 \sin 2\theta_t \sin 2\theta_0 - c_l^2 \cos^2 2\theta_0}{c_t^2 \sin 2\theta_t \sin 2\theta_0 + c_l^2 \cos^2 2\theta_0}, \quad (49.10)$$

$$A_l = A_0 \frac{2c_t c_l \sin 2\theta_0 \cos 2\theta_0}{c_t^2 \sin 2\theta_t \sin 2\theta_0 + c_l^2 \cos^2 2\theta_0}. \quad (49.11)$$

На поверхности раздела твердое тело — вакуум  $z$ -компонента вектора смещения в этом случае равна

$$u_{zt} = -A_0 \frac{2c_t^2 \cos \theta_0 \sin 2\theta_t}{c_t^2 \sin 2\theta_t \sin 2\theta_0 + c_l^2 \cos^2 2\theta_0} e^{-i\omega t}. \quad (49.12)$$

Поперечные волны, направление колебаний в которых перпендикулярно плоскости падения, не будут оказывать влияния на рассматриваемое нами явление. В самом деле, как будет видно из дальнейшего, интересующий нас эффект

определяется величиной  $z$ -компоненты вектора смещения границы раздела твердое тело — вакуум. В поперечных же колебаниях такого типа  $z$ -компонента вектора смещения на поверхности раздела равна нулю как в падающей, так и в отраженной волнах \*).

Выражения (49.7) и (49.12) содержат в качестве множителя амплитуду падающей волны  $A_0$ . Величину этой амплитуды в случае одного фонона находим из условия, сводящегося к требованию, чтобы полная энергия, заключенная в падающей волне частоты  $\omega$ , была равна  $\hbar\omega$ . Полная энергия колебаний равна удвоенной кинетической (или потенциальной) энергии; таким образом, имеем ( $\rho_T$  — плотность твердого тела)

$$\varepsilon = \int \rho_T |\dot{u}|^2 dV = \rho_T |A_0|^2 \omega^2 V = \hbar\omega, \quad (49.13)$$

откуда находим

$$|A_0| = \sqrt{\frac{\hbar}{\rho_T \omega V}}. \quad (49.14)$$

С учетом этого результата запишем выражение для модулей амплитуды  $z$ -компоненты скорости на поверхности тела ( $z = 0$ )

$$|\dot{u}_{zt}| = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\rho_T V}} \left| \frac{2c_t^2 \cos \theta_0 \cos 2\theta_t}{c_t^2 \sin 2\theta_t \sin 2\theta_0 + c_l^2 \cos^2 2\theta_t} \right|, \quad (49.15)$$

$$|\dot{u}_{zl}| = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\rho_T V}} \left| \frac{2c_t^2 \cos \theta_0 \sin 2\theta_t}{c_t^2 \sin 2\theta_t \sin 2\theta_0 + c_l^2 \sin^2 2\theta_0} \right|. \quad (49.16)$$

**Поверхностные волны.** Компоненты вектора смещения в распространяющейся в направлении оси  $x$  поверхностной волне равны

$$u_x = (a\kappa_t e^{ikx + \kappa_t z} + b\kappa e^{ikx + \kappa_l z}) e^{-i\omega t}, \quad (49.17)$$

$$u_z = -i(a\kappa e^{ikx + \kappa_t z} + b\kappa_t e^{ikx + \kappa_l z}) e^{-i\omega t}. \quad (49.18)$$

\*) В этом случае, как видно из соображений симметрии, продольная отраженная волна не возникает.

Здесь  $k = \omega/c$ ,  $c = \xi c_t$  — скорость распространения поверхностной волны;  $\xi$  — функция отношения  $c_t/c_i$ ;

$$\kappa_i = \omega \sqrt{c^{-2} - c_i^{-2}}, \quad \kappa_l = \omega \sqrt{c^{-2} - c_l^{-2}};$$

$a$  и  $b$  — некоторые постоянные.

При помощи выражений (49.17) и (49.18) вычисляем компоненты тензора деформации  $[u_{ik}]$  и тензора напряжений  $\sigma_{ik}$ .

Граничные условия на поверхности твердого тела ( $z = 0$ ):  $\sigma_{ik}n_k = 0$  дают два уравнения:

$$a(\kappa_i^2 + k^2) + 2\kappa_l kb = 0, \quad (49.19)$$

$$2\kappa_l ka + (\kappa_l^2 + k^2)b = 0. \quad (49.20)$$

Условие совместности системы (49.19), (49.20) имеет вид

$$4k^2\kappa_l\kappa_i = (\kappa_i^2 + k^2)^2 \quad (49.21)$$

и связывает между собой скорость поперечной волны  $c$  и скорость объемных волн — поперечной  $c_t$  и продольной  $c_l$ . Уравнения (49.19) — (49.20) дают, таким образом, одну связь между величинами  $a$  и  $b$ . Величина  $a$  (или  $b$ ) определяется соответствующей нормировкой, сводящейся к тому, что полная энергия, заключенная в поверхностной волне, должна быть равна  $\hbar\omega$ . Поскольку для колебательного движения потенциальная энергия равна кинетической и поскольку в данном случае выражение для кинетической энергии может быть получено более простым путем, полную энергию поверхностной волны мы найдем удвоением выражения для кинетической энергии. Таким образом, полная энергия поверхностной волны частоты  $\omega$  равна

$$\varepsilon = \int_{-\infty}^0 \rho_T (|\dot{u}_x|^2 + |\dot{u}_z|^2) s dz = \hbar\omega \quad (49.22)$$

( $\rho_T$  — плотность твердого тела,  $s$  — его поверхность).

Далее вычислим при помощи (49.17) и (49.18) производные по времени от компонент вектора смещения  $u$  и выразим коэффициент  $b$  через коэффициент  $a$  согласно (49.19).

После подстановки полученных выражений  $\dot{u}_x$  и  $u_z$  в (49.22) и интегрирования по  $z$  получим

$$s\rho_T \left\{ \frac{k^2 + \kappa_l^2}{2\kappa_l} + \frac{k^2 + \kappa_l^2}{2\kappa_l} \frac{\kappa_l}{\kappa_i} - \frac{k^2 + \kappa_l^2}{\kappa_l} \right\} \omega^2 |a|^2 = \hbar\omega. \quad (49.23)$$

Отсюда находим выражение для модуля коэффициента

$$|a| = \sqrt{\frac{\hbar}{\rho_T \omega s}} \sqrt{\frac{1}{f}}, \quad (49.24)$$

$$f = \frac{k^2 + \kappa_l^2}{2\kappa_l} + \frac{k^2 + \kappa_l^2}{2\kappa_l} \frac{\kappa_l}{\kappa_i} - \frac{\kappa_l^2 + k^2}{\kappa_l}.$$

Величина  $z$ -компоненты вектора смещения  $u$  на поверхности тела согласно (49.18) и (49.19) равна

$$u_z = -i \frac{k^2 - \kappa_l^2}{2k} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\rho_T s}} \frac{1}{\sqrt{f}}. \quad (49.25)$$

Интересующая нас в дальнейшем величина модуля  $z$ -компоненты скорости  $\dot{u}_z$  равна

$$|\dot{u}_z| = \frac{k^2 - \kappa_l^2}{2k} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\rho_T s}} \frac{1}{\sqrt{f}}. \quad (49.26)$$

## § 50. Излучение энергии колеблющейся поверхностью твердого тела

Твердое тело, поверхность которого совершает колебательное движение с частотой  $\omega$ , будет излучать в окружающую жидкую среду звук. Можно вычислить энергию, уносимую звуком в единицу времени. Она равна

$$Q = \rho_{жсж} \int |\dot{u}_n|^2 ds^*), \quad (50.1)$$

\* Выражение (50.1) имеет место в том случае, когда размеры тела превосходят длину волны излучаемого звука. В рассматриваемом случае тела, заполняющего половину пространства, это условие, естественно, соблюдается.

$\rho_{ж}$  — плотность жидкого гелия II,  $c_{ж}$  — скорость звука в гелии II,  $\dot{u}_n$  — нормальная к поверхности тела компонента скорости движения поверхности. Интегрирование производится по поверхности тела. В случае плоской границы тела интегрирование упрощается, и выражение (50.1) можно переписать в виде

$$q(\omega) = \frac{Q}{s} = \rho_{ж} c_{ж} |\dot{u}_z|^2. \quad (50.2)$$

где  $q(\omega)$  — поток энергии.

Наряду с излучением звука (фононов) с поверхности будет происходить и обратный процесс — поглощение фононов, падающих из гелия II на поверхность тела.

Что касается возможного процесса поглощения и испускания ротонных поверхностью твердого тела, то легко видеть, что такой процесс не может играть существенной роли. Действительно, фонон твердого тела может превратиться в ротон в том случае, если его энергия равна или больше  $\Delta$ . Но  $\Delta \gg kT$ , и поэтому число таких фононов в твердом теле, распределенных по Планку, экспоненциально мало. Следовательно, указанный процесс маловероятен.

Для того чтобы найти поток энергии, которым обмениваются твердое тело с жидким гелием II, необходимо вычислить разность потоков энергии, направленных от твердого тела к жидкости и от жидкости к твердому телу. Указанная разность, будучи проинтегрирована по всем частотам  $\omega$ , дает искомый поток  $\Delta W$

$$\begin{aligned} \Delta W &= \int q(\omega) \{n(T) [n(T') + 1] - [n(T) + 1] n(T')\} d\tau_{\omega} = \\ &= \int q(\omega) \{n(T) - n(T')\} d\tau_{\omega} = W(T) - W(T'): \end{aligned} \quad (50.3)$$

$d\tau_{\omega}$  — элемент фазового объема,  $n(T)$  — функция распределения Планка

$$n(T) = (e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1)^{-1}. \quad (50.4)$$

Таким образом, искомый поток равен разности значений интегралов  $W$ , полученных интегрированием  $q(\omega)$  по планковскому распределению, взятых при темпера-

турах твердого тела  $T'$ , и жидкого гелия II, взятого при температуре  $T$ . Учитывая все возможные типы колебаний, согласно (50.3) имеем

$$\begin{aligned} W &= \int \rho_{ж} c_{ж} (e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1)^{-1} \left\{ \int |\dot{u}_{zt}|^2 \frac{\omega^2 d\Omega}{2(2\pi c_t)^3} + \right. \\ &\quad \left. + \int |\dot{u}_{zt}|^2 \frac{\omega^2 d\Omega}{2(2\pi c_l)^3} + |\dot{u}_{zs}|^2 \frac{2\pi\omega s}{(2\pi c)^3} \right\} d\omega, \end{aligned} \quad (50.5)$$

$d\Omega = 2\pi \sin \theta_0 d\theta_0$  — элемент телесного угла.

В выражениях для фазовых объемов поперечных и продольных колебаний дополнительный множитель  $1/2$  учитывает то, что интегрирование происходит по половине телесного угла  $d\Omega$ . Подставим в (50.5) выражения для соответствующих  $z$ -компонент скорости  $\dot{u}_z$ , определенные формулами (49.15), (49.16) и (49.26),

$$\begin{aligned} W &= \rho_{ж} c_{ж} \int (e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1)^{-1} \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{2c_t^3} \left| \frac{2c_t^2 \cos \theta_0 \sin 2\theta_l}{c_t^2 \sin 2\theta_0 \sin 2\theta_l + c_t^2 \cos^2 2\theta_0} \right|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2c_l^3} \left| \frac{2c_l^2 \cos \theta_0 \cos 2\theta_l}{c_t^2 \sin 2\theta_0 \sin 2\theta_l + c_t^2 \cos^2 2\theta_l} \right|^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi(k^2 - \kappa_l^2)^2}{4k^3 c^3 f} \right\} \frac{\hbar\omega}{\rho_T} \frac{\omega^2 d\omega d\Omega}{(2\pi)^3}. \end{aligned} \quad (50.6)$$

Интегрирование по частотам  $\omega$  проводится элементарно. Интегралы по углам нуждаются в специальном анализе, позволяющем выяснить области интегрирования. После интегрирования по частотам и несложных преобразований угловых переменных получаем окончательное выражение для теплового потока  $W$

$$W = \frac{\rho_{ж}}{\rho_T} c_{ж} \frac{4\pi^5}{15} \frac{(kT)^4}{(2\pi\hbar c_t)^3} F(\eta), \quad (50.7)$$

где  $F(\eta)$  — некоторая функция упругих констант твердого тела ( $\eta = c_l/c_t$ ,  $\xi = c/c_t$ ,  $c$  — скорость поверхностных

волн),

$$F(\eta) = 2 \int_0^1 \frac{4y \sqrt{1-y} (y\eta^2 - 1) dy}{\eta^2 (1-2y)^4 + 16(1-y)(y\eta^2 - 1)} + \\ + 2 \int_0^{1/\eta^2} \frac{\eta (1-2y)^3 \sqrt{1-y\eta^2}}{\eta^2 (1-2y)^4 + 16y^2 (1-y)(y\eta^2 - 1)} + \\ + \frac{\pi}{4} \left\{ \left( \frac{2}{\xi} - \xi \right) \left( \frac{1}{2\sqrt{1-\xi^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\xi^2}{\eta^2}}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\xi} \sqrt{1-\xi^2} \frac{2-\frac{\xi^2}{\eta^2}}{2\left(1-\frac{\xi^2}{\eta^2}\right)} \right\}^{-1}. \quad (50.8)$$

Функция  $E(\eta)$  порядка единицы. Она вычислялась для двух значений  $\eta = 1,71$  (стекло),  $\eta = 2,22$  (платина)

$$F(1,71) \approx 2,5; F(2,22) \approx 2,0.$$

Поток энергии, переносимый между твердым телом и жидким гелием II, согласно (50.3) и (50.4) равен

$$\Delta W_{\text{зв}} = W(T) - W(T') = \\ = \frac{\rho_{\text{ж}}}{\rho_{\text{т}}} c_{\text{ж}} \frac{16\pi^5}{15} \frac{1}{(2\pi\hbar c_{\text{т}})^3} F\{(kT)^4 - (kT')^4\}. \quad (50.9)$$

Таким образом, указанный поток пропорционален разности четвертых степеней температуры твердого тела и жидкого гелия II. Для малых разностей температур формулу (50.9) можно переписать в виде

$$\Delta W_{\text{зв}} = \frac{\rho_{\text{ж}}}{\rho_{\text{т}}} c_{\text{ж}} \frac{16\pi^5}{15} \frac{(kT)^3}{(2\pi\hbar c_{\text{т}})^3} Fk(T - T'). \quad (50.10)$$

Излученная твердой стенкой энергия распространяется в гелии II в виде фононов. Возникающий в связи с этим избыток фононов, однако, очень быстро рассасывается. Вероятность превращения фонона в ротон срав-

нительно велика, соответствующее время, характеризующее этот процесс, было нами найдено ранее. При температуре порядка  $1,5-2^\circ \text{K}$  оно равно  $10^{-9} - 10^{-10} \text{ сек.}$  Таким образом, избыточные (над равновесным числом) фононы превращаются в ротонь сравнительно быстро на расстояниях порядка  $10^{-4} \text{ см}$  от стенки. С другой стороны, теплопередача от твердой стенки к гелию II (или наоборот) происходит очень медленно, а возникающий между ними поток тепла ничтожно мал. Таким образом, можно считать, что теплообмен осуществляется между твердым телом и гелием II, находящимися в равновесии.

### § 51. Обмен энергией при соударениях ротонов и фононов с твердой стенкой

Возможен обмен энергией между твердым телом и жидким гелием II при соударениях ротонов (фононов) с твердой стенкой. Ротон (фонон) при отражении от твердой стенки может приобрести или потерять некоторую энергию. Такое изменение энергии сопровождается поглощением или испусканием фонона в твердом теле. Энергия испущенного фонона  $\epsilon$  и угол  $\theta'$ , под которым он испущен, определяются двумя законами сохранения: законом сохранения энергии

$$E = E_1 + \epsilon \quad (\epsilon = \hbar\omega) \quad (51.1)$$

и законом сохранения для компонент импульса, касательных к поверхности раздела:

$$p \sin \theta = p_1 \sin \theta_1 + p' \sin \theta', \quad (51.2)$$

$E$ ,  $p$  и  $E_1$ ,  $p_1$  — энергия и импульс ротоны (или фонона), соответственно падающего и отраженного;  $\epsilon$ ,  $p'$  — энергия и импульс фонона, испущенного в твердом теле. Смысл углов ясен из рис. 9.

Скорость звука в твердом теле значительно превосходит скорость звука (фонона) в гелии II. Поэтому при

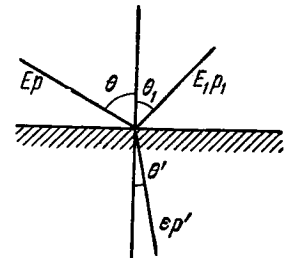


Рис. 9.

не сильно различающихся температурах твердого тела и гелия II импульсы фононов в гелии II будут значительно превосходить импульсы фононов в твердом теле. Импульсы ротон, величина которых близка к  $p_0 = 2 \cdot 10^{-19} \text{ г} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}^{-1}$ , значительно превосходят импульсы фононов в гелии II, а следовательно, и импульсы фононов в твердом теле. Это обстоятельство позволяет нам в дальнейшем пренебречь импульсом фонона в твердом теле в правой части соотношения (51.2).

Необходимо заметить, что соотношение (51.2), строго говоря, применимо лишь к случаю соударения фононов с твердой стенкой. Длина волны фононов заметно превосходит межатомные расстояния. Поэтому для фононов микроструктура стенки несущественна, стенку можно считать гладкой, а следовательно, соотношение (51.2) имеет место. Ротоны имеют длины волны порядка  $\hbar/p_0 = 0,5 \cdot 10^{-8} \text{ см}$ , сравнимую с межатомными расстояниями. Поэтому для случая соударения со стенкой ротона стенку можно считать гладкой лишь приближенно. Мы в дальнейшем будем тем не менее предполагать соотношение (51.2) справедливым и для ротон. По этой причине результаты для ротон имеют приближенный характер. Влияние микроструктуры поверхности можно эффективным образом учесть некоторым изменением поверхности твердого тела. Таким образом, формулы, определяющие теплообмен, обязанный ротонам, верны лишь с точностью до некоторого множителя порядка единицы. Забегая вперед, укажем, что такое приближение не оказывает влияния на окончательные результаты, так как этот механизм теплообмена играет незначительную роль в общем балансе энергии. Поверхность твердого тела совершает малые колебания. Величина скорости колеблющейся поверхности  $u$  была определена в предыдущем пункте. Ротон (или фонон), попавший на твердую стенку, можно рассматривать как некоторую частицу, находящуюся в колеблющейся среде (в фононном поле). При таком рассмотрении несущественна внутренняя структура ротона и фонона. Энергия элементарного возбуждения, попавшего на твердую стенку, в неподвижной системе отсчета равна

$$H' = H - (pi) \quad (51.3)$$

( $H$  — энергия элементарного возбуждения в системе отсчета, движущейся вместе с поверхностью). Отсюда следует, что энергия взаимодействия элементарного возбуждения с твердой стенкой равна  $-(pi)$ . Соответствующий квантовый эрмитовский оператор, описывающий взаимодействие элементарного возбуждения с твердой стенкой, есть

$$V = -\frac{1}{2}(pi + ip), \quad (51.4)$$

где  $p = -i\hbar\nabla$  — оператор импульса.

После этих общих соображений перейдем к рассмотрению случая соударения ротона с твердой стенкой. Вероятность перехода при соударении из состояния с энергией  $E$  в состояние с энергией  $E_1$  равна

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |M|^2, \quad (51.5)$$

где  $M$  — матричный элемент энергии взаимодействия  $V$ , взятый между волновыми функциями: для начального состояния — нормированной на единичный поток, а для конечного состояния — нормированной на энергию. Волновая функция падающего ротона, нормированная на единичный поток и удовлетворяющая условию  $\psi = 0$  при  $z = 0$ , есть

$$\psi = \frac{2}{\sqrt{v \cos \theta}} \sin\left(\frac{p \cos \theta}{\hbar} z\right) \quad (51.6)$$

( $v = \partial E / \partial p$  — скорость падающего ротона). Для конечного состояния аналогичным образом имеем

$$\psi_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi \hbar v_1 \cos \theta_1}} \sin\left(\frac{p_1 \cos \theta_1}{\hbar} z\right) \left(v_1 = \frac{\partial E_1}{\partial p_1}\right). \quad (51.7)$$

Вычислим матричный элемент перехода  $M$ ; имеем

$$\begin{aligned} M &= \int_0^\infty \psi_1 V \psi dz = \\ &= \int_0^\infty \frac{4ip \cos \theta u_z}{\sqrt{\pi \hbar v v_1 \cos \theta \cos \theta_1}} \cos \frac{pz \cos \theta}{\hbar} \sin \frac{p_1 z \cos \theta_1}{\hbar} dz. \end{aligned} \quad (51.8)$$

Здесь  $\dot{u}_z$  — амплитуда скорости колебаний поверхности твердого тела, определенная для различных колебаний формулами (49.15), (49.16) и (49.26). После интегрирования по  $z$  в (51.8) находим

$$M = \frac{4i\hbar p \cos \theta p_1 \cos \theta_1}{(p_1^2 \cos^2 \theta_1 - p^2 \cos^2 \theta) \sqrt{v v_1 \cos \theta \cos \theta_1 \pi \hbar}} \quad (51.9)$$

Подставив этот результат в (51.5), получаем вероятность рассматриваемого перехода

$$w = \frac{2}{\hbar} \frac{16\hbar p^2 p_1^2 \cos \theta \cos \theta_1 |\dot{u}_z|^2}{(p_1^2 \cos^2 \theta_1 - p^2 \cos^2 \theta)^2 v v_1} = \frac{32 p^2 p_1^2 \cos \theta \cos \theta_1 |\dot{u}_z|^2}{(p_1^2 - p^2)^2 v v_1} \quad (51.10)$$

При этом мы учли, что согласно (51.2)

$$p_1^2 \cos^2 \theta_1 - p^2 \cos^2 \theta = p_1^2 - p^2. \quad (51.11)$$

Переносимый между твердым телом и жидким гелием II поток энергии равен

$$\Delta W_p = \iint w \{n(n' + 1) - n'n_1\} \hbar \omega d\tau_\omega v \cos \theta d\tau_p. \quad (51.12)$$

Здесь  $d\tau_\omega$  — элемент фазового объема, соответствующий частоте испущенного фонона;  $d\tau_p$  — элемент фазового объема падающего ротона;  $n$  и  $n_1$  — функции распределения Больцмана для падающего и отраженного ротонов \*):

$$n = e^{-E/kT}, \quad n_1 = e^{-E_1/kT};$$

$n'$  — функция распределения Планка для фононов в твердом теле

$$n' = (e^{\hbar\omega/kT'} - 1)^{-1}.$$

Выражение в фигурной скобке в (51.12) после подстановки соответствующих функций распределения для малых разностей температур приводится к виду

$$\begin{aligned} \{n(n' + 1) - n'n_1\} &= \\ &= e^{-\Delta/kT} \frac{\hbar\omega(T' - T)}{kT^2 \left[ \exp \left\{ \frac{(p - p_0)^2}{2\mu kT} \right\} - \exp \left\{ \frac{(p_1 - p_0)^2}{2\mu kT'} \right\} \right]}. \end{aligned} \quad (51.13)$$

\*) Ротоны подчиняются классической статистике.

Произведение  $|\dot{u}_z|^2 d\tau_\omega$ , содержащееся в интеграле, при учете всех трех возможных типов колебаний поверхности согласно (51.5) и (51.6) преобразуется следующим образом:

$$|\dot{u}_z|^2 d\tau_\omega \rightarrow \frac{\hbar\omega}{\rho_T} \frac{4\pi\omega^2 d\omega}{(2\pi c_l)^3} F, \quad (51.14)$$

где  $F(c_l/c_l)$  определяется формулой (51.8).

Подставив (51.10), (51.13) и (51.14) в (51.12) и перейдя от переменной интегрирования  $\omega$  к переменной  $p_1$  ( $\hbar d\omega = -v_1 dp_1$ ), получаем

$$\begin{aligned} \Delta W_p &= \int \frac{256\pi^2 (\hbar\omega)^4 p^4 dp \cdot p_1^2 dp_1 \cos^2 \theta \cos \theta_1 d\cos \theta}{(2\pi\hbar)^3 c_l^3 (p^2 - p_1^2)^2 \left[ \exp \left\{ \frac{(p - p_0)^2}{2\mu kT} \right\} - \exp \left\{ \frac{(p_1 - p_0)^2}{2\mu kT'} \right\} \right]} \times \\ &\quad \times \frac{e^{-\Delta/kT} (T - T')}{kT^2} F, \\ \hbar\omega &= \frac{(p - p_0)^2}{2\mu} - \frac{(p_1 - p_0)^2}{2\mu}. \end{aligned} \quad (51.15)$$

Импульсы ротонов  $p$  по своей величине близки к  $p_0$ . Поэтому в интеграле (51.15) всюду, где не содержится существенным образом разность  $p_1 - p$ , можно заменить  $p$  и  $p_1$  на  $p_0$ . Угловой интеграл при этом вычисляется обычным образом (интегрирование по полусфере)

$$\int_0^1 \cos^2 \theta \cos \theta_1 d\cos \theta \approx \int_0^1 \cos^2 \theta d\cos \theta = \frac{1}{4}.$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} (p - p_0)^2 / 2\mu kT &= x, \\ (p_1 - p_0)^2 / 2\mu kT' &= y. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$\Delta W_p = \frac{p_0^4 (kT)^4 e^{-\Delta/kT} F G_p}{4\pi^4 \rho_T \hbar^3 c_l^3} \frac{T - T'}{T'}, \quad (51.16)$$

где

$$G_p = \int_0^\infty dx \int_0^x \frac{(Vx + Vy)^2 (x - y)^3 dy}{Vxy (e^x - e^y)} \approx 50. \quad (51.17)$$



Произведем аналогичные вычисления для случая соударения фононов с твердой стенкой. Для фононов аналогом волновой функции является потенциал скоростей  $\psi$ , удовлетворяющий волновому уравнению. На твердой стенке потенциал  $\psi$  удовлетворяет граничному условию

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)_{z=0} = 0. \quad (51.18)$$

Нормированная на единичный поток и удовлетворяющая этому граничному условию  $\psi$ -функция падающего фонона равна

$$\psi = \frac{2}{\sqrt{c_{\text{ж}} \cos \theta}} \cos \frac{(p \cos \theta) z}{\hbar}. \quad (51.19)$$

Для нормированной на энергию  $\psi$ -функции конечного состояния имеем выражение

$$\psi_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi \hbar c_{\text{ж}} \cos \theta_1}} \cos \frac{p_1 z \cos \theta_1}{\hbar}. \quad (51.20)$$

Матричный элемент энергии взаимодействия фонон — твердая стенка для рассматриваемого перехода равен

$$\begin{aligned} M &= \int_0^\infty \psi_1 V \psi dz = \\ &= \frac{4i u_z p \cos \theta}{c_{\text{ж}} \sqrt{\pi \hbar \cos \theta \cos \theta_1}} \int_0^\infty \cos \frac{p_1 z \cos \theta_1}{\hbar} \sin \frac{p z \cos \theta}{\hbar} dz = \\ &= \frac{4i \hbar p^2 \cos^2 \theta}{(p^2 \cos \theta - p_1^2 \cos^2 \theta_1) c_{\text{ж}} \sqrt{\pi \hbar \cos \theta \cos \theta_1}}. \end{aligned} \quad (51.21)$$

Далее для вероятности рассматриваемого перехода имеем

$$w = \frac{2\pi}{\hbar} |M|^2 = \frac{32 p^4 \cos^3 \theta |u_z|^2}{\cos \theta_1 (p_1^2 - p^2)^2 c_{\text{ж}}^2}. \quad (51.22)$$

Переносимый при этом между твердым телом и жидким гелием II поток энергии равен

$$\Delta W = \iint w \{n(n' + 1)(n_1 + 1) - n'n_1(n + 1)\} c_{\text{ж}} \cos \theta d\tau_p \hbar \omega d\tau_\omega. \quad (51.23)$$

Здесь  $n$ ,  $n_1$  и  $n'$  — функции распределения Планка соответственно для падающего, отраженного и испущенного в твердом теле фононов:

$$n = (e^{\frac{E}{kT}} - 1)^{-1}, \quad n_1 = (e^{\frac{E_1}{kT}} - 1)^{-1}, \quad n' = (e^{\frac{E'}{kT}} - 1)^{-1}.$$

Выражение, стоящее в фигурной скобке в интеграле (51.23) после подстановки указанных функций распределения для малых разностей температур приобретает вид:

$$\begin{aligned} \{n(n_1 + 1)(n' + 1) - n'n_1(n + 1)\} &= \frac{T' - T}{kT^2} \times \\ &\times \frac{E - E_1}{(e^{\frac{E}{kT}} - e^{\frac{E_1}{kT}})(1 - e^{-\frac{E}{kT}})(1 - e^{-\frac{E_1}{kT}})}. \end{aligned} \quad (51.24)$$

Подставим (51.22), (51.24) и (51.23) и воспользуемся (51.15); в результате получаем

$$\begin{aligned} \Delta W &= \frac{256 \pi^2 F (T' - T)}{kT^2 (2\pi c_l)^2 (2\pi \hbar)^2 \rho_T c_{\text{ж}}} \times \\ &\times \iint \frac{(\hbar \omega)^2 \omega^2 d\omega p^2 dp}{(p^2 - p_1^2)^2 (e^{\frac{E}{kT}} - e^{\frac{E_1}{kT}})(1 - e^{-\frac{E}{kT}})(1 - e^{-\frac{E_1}{kT}})} \times \\ &\times \int_0^1 \frac{\cos^4 \theta}{\cos \theta_1} d \cos \theta. \end{aligned}$$

Далее введем новую переменную интегрирования  $p_1$  вместо  $\omega$  и обозначения

$$E/kT = x, \quad E_1/kT = y, \quad \hbar \omega = kT(x - y).$$

Окончательно искомый поток энергии  $\Delta W_\Phi$  может быть записан в виде

$$\Delta W_\Phi = \frac{4(kT)^2 F G_\Phi (T - T')}{\pi^4 \hbar^2 \rho_T c_l^3 c_{\text{ж}}^2 T}, \quad (51.25)$$

$$\begin{aligned} G_\Phi &= \int_0^\infty dx \int_0^x \frac{x^6 (x - y)^3 dy}{(x + y)(e^x - e^y)(1 - e^{-x})(1 - e^{-y})} \times \\ &\times \left\{ \frac{3}{16} \frac{y}{x} \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) \ln \frac{x + y}{x - y} + \frac{5y^3}{8x^2} - \frac{3}{8} \frac{y^4}{x^4} \right\} \approx \frac{1}{2} 7! \end{aligned} \quad (51.26)$$

## § 52. Теплообмен между твердым телом и жидким гелием II

Выясним относительную роль вычисленных выше трех потоков,  $\Delta W_{\text{зв}}$  (50.9),  $\Delta W_p$  (51.16) и  $\Delta W_\phi$  (51.25), в процессе теплопередачи между твердым телом и жидким гелием II. Для этого найдем отношения

$$\frac{\Delta W_\phi}{\Delta W_p} \text{ и } \frac{\Delta W_{\text{зв}}}{\Delta W_\phi}.$$

Согласно (51.16) и (51.25) имеем

$$\frac{\Delta W_\phi}{\Delta W_p} = \frac{16 (kT)^4}{c_{\text{ж}}^4 p_0^4} \frac{G_\phi}{G_p} e^{\frac{\Delta}{kT}} \approx 8 \cdot 10^{-4} T^4 e^{\frac{\Delta}{kT}},$$

Это отношение близко к единице при  $T = 2^\circ \text{ K}$ , затем увеличивается, достигая 10 при  $T = 1^\circ \text{ K}$ . Далее согласно (50.10) и (51.25) имеем

$$\frac{\Delta W_{\text{зв}}}{\Delta W_\phi} = \frac{\pi^6 p_{\text{ж}} c_{\text{ж}} \hbar^3 F}{30 G_\phi \left( \frac{kT}{c_{\text{ж}}} \right)^4} \approx \frac{50}{T^4}.$$

Это отношение близко к трем при  $T = 2^\circ \text{ K}$ , а затем при понижении температуры быстро возрастает, достигая 50 при  $T = 1^\circ \text{ K}$ .

Таким образом, при всех температурах ниже  $\lambda$ -точки теплопередача между твердым телом и жидким гелием II осуществляется главным образом путем излучения (и поглощения) звука с колеблющейся поверхности твердого тела. Величина возникающего потока тепла между твердым телом, находящимся при температуре  $T'$ , и жидким гелием II, находящимся при температуре  $T$ , в первом приближении пропорциональна  $T - T'$ . Коэффициент пропорциональности согласно (50.10) изменяется с температурой по кубическому закону.

Эти результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными Капицы. Особенно следует подчеркнуть совпадение температурных законов для величины теплосопротивления.

При количественном сравнении теории с экспериментом необходимо иметь в виду отклонения от той картины идеально гладкой границы между твердым телом и жидким гелием, которая выше предполагалась. По-видимому, наиболее важным отклонением от такой идеальности является наличие промежуточного слоя между твердым телом и жидким гелием со средними между ними акустическими свойствами. Такой слой может образоваться как за счет кристаллизации гелия на поверхности, так и за счет адсорбции и проникновения гелия в толщу твердого тела. Если бы эти явления имели место, то они приводили бы к уменьшению звукового сопротивления рассматриваемой границы и могли бы объяснить имеющиеся расхождения между абсолютными значениями сопротивления, даваемые теорией, и экспериментом. Имеются эксперименты, которые указывают на участие электронов в процессах передачи энергии от жидкого гелия к твердому телу. Звуковое сопротивление на границе жидкий гелий—металл оказывается больше в том случае, когда металл находится в сверхпроводящем состоянии. Выше предполагалось, что рэлеевские волны сильно связаны с фононной системой твердого тела. Если эта связь осуществляется электронами, то тогда вклад рэлеевских волн в сопротивление на границе с жидким гелием будет различным в нормальном и сверхпроводящем состояниях металла. При этом сопротивление в сверхпроводящем состоянии будет возрастать. Подробные расчеты, однако, показывают, что количественно этот эффект невелик.

Из сказанного выше следует, что теплообмен между твердым телом и жидким гелием II осуществляется с большим трудом. Можно вычислить максимальную скорость нормального движения  $v_n$ , которая возникает в жидком гелии II при погружении в него твердого тела. Конвективный поток тепла в гелии II равен

$$\rho_{\text{ж}} T \sigma v_n$$

( $\sigma$  — энтропия единицы массы гелия II). Максимальный поток тепла возникает в том случае, когда твердое тело находится при абсолютном нуле температур. При этом

поток  $W_{\text{зв}}$  согласно (50.10) равен

$$\frac{\rho_{\text{ж}}}{\rho_{\text{т}}} c_{\text{ж}} \frac{4\pi^5}{15} \frac{(kT)^4}{(2\pi\hbar c_l)^3} F$$

( $T$  — температура гелия II). Приравняв оба потока, находим максимальное значение  $v_n$ :

$$v_{n\text{max}} = \frac{4\pi^5 c_{\text{ж}} (kT)^4 F}{\rho_{\text{т}} T c_l 15 (2\pi\hbar c_l)^3}. \quad (52.1)$$

Полученное таким образом значение  $v_{n\text{max}}$  оказывается порядка десятых долей *см/сек* при температуре  $2^\circ \text{K}$ . При более низких температурах  $v_{n\text{max}}$  возрастает, стремясь к постоянному пределу (при низких температурах энтропия  $\sigma$  изменяется с температурой по кубическому закону \*) ,

$$v_{n\text{max}} = c_{\text{ж}} \frac{\rho_{\text{ж}}}{\rho_{\text{т}}} \left( \frac{c_{\text{ж}}}{c_l} \right)^3 F. \quad (52.2)$$

Граница между твердым телом и жидким гелием обладает большим теплосоппротивлением. При выполнении некоторых условий это сопротивление превышает теплосоппротивление самого твердого тела. Согласно (50.10) поток тепла между твердым телом и гелием II  $\Delta W$  равен

$$\left. \begin{aligned} \Delta W &= K (T^4 - T'^4) \approx 4KT^3 (T - T'), \\ K &= c_{\text{ж}} \frac{\rho_{\text{ж}}}{\rho_{\text{т}}} \frac{4\pi^5}{15} \frac{k^4}{(2\pi\hbar c_l)^3} F. \end{aligned} \right\} \quad (52.3)$$

Пусть  $l$  — толщина твердого тела, а  $\kappa$  — его теплопроводность. Очевидно, что при достаточно малых размерах  $l$ , когда выполнено условие

$$\frac{\kappa}{l} \gg 4KT^3, \quad (52.4)$$

теплосоппротивление границы превышает теплосоппротивление твердого тела. Определим в этом случае температуру твердого тела  $T$ , окруженного жидким гелием II,

\*) При достаточно низких температурах существенна фоновая часть энтропии  $\sigma_{\text{ф}}$ , равная

$$\sigma_{\text{ф}} = \frac{16\pi^5}{45\rho_{\text{ж}}} \frac{k(kT)^3}{(2\pi\hbar c_{\text{ж}})^3}.$$

имеющего с одной стороны от твердого тела температуру  $T_1$ , а с другой —  $T_2$ . Поскольку теплосоппротивление самого тела относительно мало, температура тела будет постоянной. Значение этой температуры определяется из условия равенства потоков тепла на левой и правой границах твердого тела. Согласно (52.3) имеем

$$K (T_1^4 - T^4) = K (T^4 - T_2^4),$$

откуда находим

$$T^4 = \frac{1}{2} (T_1^4 + T_2^4). \quad (52.5)$$

Уместно также указать, что весь произведенный в настоящей работе анализ пригоден лишь к случаю границы между твердым телом и квантовой жидкостью. В обычных жидкостях нельзя говорить об отдельных возбуждениях. В случае теплообмена между твердым телом и обычной жидкостью нет причин, которые ограничивали бы обмен энергией. Поэтому на указанной границе скачок температуры отсутствует. Существенным в этом случае является также то обстоятельство, что обычные жидкости обладают конечной теплопроводностью. Теплосоппротивление жидкости в объеме превосходит теплосоппротивление границы с твердым телом, это приводит к распределению разности температур между твердым телом и жидкостью вдоль всего объема жидкости; гелий же II обладает практически бесконечной теплопроводностью, и теплосоппротивление гелия в объеме равно нулю (температура вдоль жидкого гелия остается постоянной). Поэтому разность температур между твердым телом и гелием II осуществляется в форме скачка на границе.

### § 53. Прохождение второго звука через металлические пластины. Поглощение второго звука на стенках цилиндрического сосуда

Большое теплосоппротивление границы твердое тело — жидкий гелий II ответственно за аномально малое значение коэффициента прохождения второго звука через тонкие металлические фольги. Мы будем предполагать условие (52.4) выполненным.

Пусть на пластину падает нормально плоская волна второго звука. Поток энергии во втором звуке  $J$  слева от пластины можно представить в виде

$$J_n = (J_1 e^{ikx} - J_2 e^{-ikx}) e^{-i\omega t}, \quad (53.1)$$

где  $J_1$  и  $J_2$  — амплитуды потока энергии в падающей и отраженной волнах.

Согласно уравнению непрерывности энтропии колебания температуры в гелии II слева от пластины определяются выражением

$$T_n = \frac{1}{Cu_2} (J_1 e^{ikx} + J_2 e^{-ikx}) e^{-i\omega t} \quad (53.2)$$

( $C$  — теплоемкость единицы объема гелия II).

Аналогичным образом справа от пластины поток энергии равен

$$J_n = J_3 e^{ikx - i\omega t}, \quad (53.3)$$

а колебания температуры

$$T_n = \frac{1}{Cu_2} J_3 e^{ikx - i\omega t}. \quad (53.4)$$

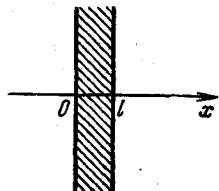


Рис. 10.

При прохождении второго звука через теплопроводящую пластину ее температура при выполнении условия (52.4) будет оставаться постоянной вдоль пластины, но отличной от температуры при отсутствии звука на величину  $T'$ . Условия непрерывности потоков энергии на левой и правой границах (рис. 10) запишутся соответственно в виде:

$$\begin{aligned} J_1 - J_2 &= 4KT^3 (T_{n(x=0)} - T') = \\ &= J_3 e^{ikl} = 4KT^3 (T' - T_{n(x=l)}) \end{aligned} \quad (53.5)$$

( $T$  — температура гелия II).

Малость толщины пластины позволяет пренебречь изменением фазы при прохождении второго звука через пластину ( $kl \ll 1$ ). Подставим в (53.5) выражение (53.2) и (53.4) для  $T_n$  и  $T_n$ , пренебрегая при этом изменением

фаз; получим

$$J_1 - J_2 = 4KT^3 \left( \frac{J_1 + J_2}{Cu_2} - T' \right) = J_3 = 4KT^3 \left( T - \frac{J_3}{Cu_2} \right). \quad (53.6)$$

Отсюда легко находим величины  $J_2$  и  $J_3$ :

$$J_2 = J_1 \frac{1}{1 + \frac{4KT^3}{Cu_2}}, \quad (53.7)$$

$$J_3 = J_1 \frac{4KT^3}{Cu_2} \frac{1}{1 + \frac{4KT^3}{Cu_2}} \quad (53.8)$$

Коэффициент прохождения второго звука  $J_3/J_1$ , таким образом, равен

$$\frac{J_3}{J_1} = \frac{4KT^3}{Cu_2} \frac{1}{1 + \frac{4KT^3}{Cu_2}}. \quad (53.9)$$

Отношение  $4KT^3/Cu_2$  при всех температурах оказывается значительно меньше единицы. При крайне низких температурах, когда теплоемкость  $C$  гелия II определяется только фононами, величина коэффициента прохождения второго звука стремится к постоянному пределу, не зависящему от температуры. В этом случае имеем

$$C = C_\phi = 4 \frac{4\pi^5}{15} \frac{k \cdot (kT)^3}{(2\pi\hbar c_{ж})^3}, \quad u_2 = \frac{c_{ж}}{\sqrt{3}}.$$

Подставив эти выражения в (53.9), получаем

$$\left( \frac{J_3}{J_1} \right)_{T \rightarrow 0} = \frac{\rho_n}{\rho_T} \sqrt{3} \left( \frac{c_{ж}}{c_T} \right)^3 F \quad (53.10)$$

(для платины это отношение равно  $2,5 \cdot 10^{-4}$ ).

Наличие температурного скачка на границе между твердым телом и жидким гелием II существенным образом сказывается на явлении отражения второго звука от твердой стенки. Пусть на плоскую границу между гелием

II и твердым телом, заполняющим половину пространства, падает нормально плоская волна второго звука. Начало координат выбираем на указанной границе, а ось  $x$  — по нормали к плоскости границы. Поток энергии в гелии II и распределение температуры  $T$  определяются соответственно выражениями (53.1) и (53.2). Распределение температуры в твердом теле определяется уравнениями теплопроводности

$$C_T \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (53.11)$$

Обозначив температуру твердой стенки через  $T_0$ , из (53.11) без труда находим

$$T = T_0 \exp[-\sqrt{C_T i \omega / \kappa} \cdot x] e^{i \omega t}. \quad (53.12)$$

Требование непрерывности потоков энергии на границе между гелием и твердым телом дает два условия, а именно:

$$J_1 - J_2 = 4KT^3 \left\{ \frac{J_1 + J_2}{Cu_2} - T_0 \right\} = -\kappa \operatorname{Re} \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0}. \quad (53.13)$$

Выражение, стоящее в (53.13) между двумя знаками равенства, есть поток энергии, обязанный скачку температуры на границе. Подставим в (53.13) выражение (53.12) для  $T$  и исключим из наших условий величину  $T_0$ . Таким образом находим соотношение, связывающее потоки  $J_2$  и  $J_1$ :

$$J_2 = J_1 \left( 1 - \frac{4kT^3/Cu_2}{1 + 4KT^3 \sqrt{2/C_T \kappa \omega}} \right) / \left( 1 + \frac{4kT^3/Cu_2}{1 + 4KT^3 \sqrt{2/C_T \kappa \omega}} \right). \quad (53.14)$$

Как уже отмечалось, имеет место следующее неравенство  $Cu_2/4KT^3 \gg 1$ . С учетом этого обстоятельства из (53.14) находим выражение коэффициента отражения и коэффициента прохождения в твердое тело для второго звука:

$$\frac{J_2}{J_1} = 1 - \frac{2}{Cu_2 \left( \frac{1}{4KT^3} + \sqrt{\frac{2}{C_T \kappa \omega}} \right)} \quad (53.15)$$

(коэффициент отражения),

$$\frac{J_1 - J_2}{J_1} = \frac{2}{Cu_2 \left( \frac{1}{4KT^3} + \sqrt{\frac{2}{C_T \kappa \omega}} \right)}. \quad (53.16)$$

(коэффициент прохождения).

В знаменателе формулы (53.16) содержится сумма тепловых сопротивлений границы  $1/4KT^3$  и твердого тела  $\sqrt{2/C_T \kappa \omega}$ . Если твердое тело обладает большой теплопроводностью, то отражение второго звука определяется главным образом теплосоппротивлением границы. Наоборот, в случае малой теплопроводности твердого тела отражение определяется величиной теплосоппротивления твердого тела. Благодаря условию  $Cu_2/4KT^3 \gg 1$  коэффициент отражения второго звука мало отличается от единицы.

При помощи формулы (53.16) легко можно вычислить коэффициент поглощения второго звука на стенках цилиндрического сосуда. В случае, когда звук распространяется по оси трубки радиуса  $r$ , из формулы (53.16) вытекает следующее выражение для коэффициента поглощения звука:

$$\gamma_x = \frac{P}{2Q} \frac{1}{Cu_2 \left( \frac{1}{4KT^3} + \sqrt{\frac{2}{C_T \kappa \omega}} \right)}. \quad (53.17)$$

Здесь  $P$  — периметр цилиндра,  $Q$  — площадь поперечного сечения \*). Для кругового цилиндра, таким образом, имеем

$$\gamma_x = \frac{1}{rCu_2} \frac{1}{\frac{1}{4KT^3} + \sqrt{\frac{2}{C_T \kappa \omega}}}. \quad (53.18)$$

Формула (53.18) определяет коэффициент поглощения

\*) В случае распространения звука по оси трубки необходимо ввести дополнительный множитель 2 в знаменателе (53.17). Это вызывается тем, что при отражении звука, как видно из формулы (53.2), температура  $T$  практически удваивается по сравнению с температурой в падающей (бегущей) волне.

второго звука на стенках цилиндрического сосуда, обязанный теплопроводности стенок и скачку температуры на границе между жидким гелием II и твердым телом. Коэффициент поглощения второго звука на стенках цилиндрического сосуда был вычислен Пешковым [31]. Он складывается из трех частей, обязанных вязким потерям, теплопроводным потерям и, наконец, краевым эффектам. Та часть коэффициента поглощения, которая обязана вязким потерям, согласно [31] равна

$$\gamma_n = \frac{1}{ru_{2p}} \frac{\rho_s}{\rho_n} \sqrt{\frac{\rho_n \eta \omega}{2}}. \quad (53.19)$$

Что касается тепловых потерь, то в указанной работе не учитывался скачок температуры на границе между твердым телом и жидким гелием, существенно меняющий величину  $\gamma$ . Окончательно для коэффициента поглощения второго звука на стенках цилиндра при помощи (53.18) и (53.19) получаем следующее выражение:

$$\gamma = \frac{1}{ru_{2p}} \frac{\rho_s}{\rho_n} \sqrt{\frac{\rho_n \eta \omega}{2}} + \frac{1}{ru_{2p}} \frac{1}{\frac{1}{4KT^3} + \sqrt{\frac{2}{C_T \mu \omega}}} + \gamma_{кр}. \quad (53.20)$$

Член  $\gamma_{кр}$  обязан краевым потерям.

Поглощение второго звука на стенках существенно лишь при малых частотах звука. При больших же частотах объемное поглощение, зависящее от частоты по закону  $\omega^2$ , заметно превосходит поверхностные эффекты.

## РАСТВОРЫ ПОСТОРОННИХ ЧАСТИЦ В СВЕРХТЕКУЧЕМ ГЕЛИИ II

### § 54. Термодинамика растворов [32, 33]

Свойства слабых растворов посторонних частиц в сверхтекучем гелии могут быть выяснены на основе самых общих соображений. Под посторонними частицами подразумеваются атомы изотопа  $\text{He}^3$ , электроны, ионы атомов  $\text{He}^4$  и т. д. В слабом растворе растворенные частицы практически не будут взаимодействовать друг с другом. Обладая большой длиной волны, они не будут локализованы в определенном месте жидкости. Взаимодействие примесей с атомами  $\text{He}^4$  приведет к появлению дополнительных энергетических уровней. Состояние примесей можно классифицировать по значению непрерывной переменной импульса. Таким образом, каждой частице примеси соответствует некоторое элементарное возбуждение, характеризующееся энергией — функцией импульса. Логически возможны различные типы спектров. Однако фактически мы имеем дело с самым простым случаем, когда энергия  $\varepsilon$  есть просто квадратичная функция импульса  $p$  с некоторой эффективной массой  $m^*$ :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{p^2}{2m^*}. \quad (54.1)$$

( $\varepsilon_0$  — некоторая постоянная «нулевая энергия»).

Так, для случая, когда посторонними частицами являются атомы изотопа  $\text{He}^3$ , имеет место спектр типа (54.1) с эффективной массой  $m^* \approx 2,8 M_{\text{He}}$ . По-видимому, спектр (54.1) имеет место также для случая электронов и ионов.

До тех пор, пока скорость примесных частиц  $p/m^*$  меньше скорости звука в сверхтекучем гелии, такая частица не способна излучать фононы. Излучение ротона также невозможно, если энергия примеси  $p^2/2m^*$  не превосходит энергию ротона  $\Delta$ . Таким образом, примесные частицы, движущиеся с «дозвуковыми» скоростями, не будут взаимодействовать со сверхтекучей частью жидкости. Однако примесные частицы будут сталкиваться и взаимодействовать с фононами и ротонами и, естественно, будут увлекаться их движением. Поэтому в условиях слабого раствора примесные частицы увлекаются нормальным движением жидкости. Следует подчеркнуть, что полученный вывод об участии примесей в нормальном движении несколько не связан с тем, сверхтекучи или несверхтекучи атомы примеси сами по себе. Так, атомы маложивущего изотопа  $\text{He}^6$ , способные сами по себе образовывать сверхтекучую жидкость, в слабом растворе в  $\text{He}^4$  будут участвовать только в нормальном движении. Распределение атомов примеси по энергиям определится в области не очень низких температур статистикой Больцмана. В области же низких температур необходимо учитывать вырождение примесного газа и взаимодействие частиц примеси друг с другом. Если спин частиц — полуцелый, то температура вырождения  $T_0$  равна

$$T_0 = \frac{\hbar^2 N_0^{2/3} c^{1/3}}{k m^*} \left( \frac{3\pi^2}{\sqrt{2}(2s+1)} \right)^{2/3}; \quad (54.2)$$

для примесей с целым спином имеем

$$T_0 = \frac{\hbar^2 N_0^{2/3} c^{1/3}}{k m^*} \frac{\pi^{2/3}}{2(2s+1)^{2/3}}. \quad (54.3)$$

Здесь  $N_0 = \rho/m$  — число атомов  $\text{He}^4$  в  $1 \text{ см}^3$ ,  $m$  — масса атома  $\text{He}^4$ .

Для случая, когда примесью являются атомы  $\text{He}^3$ , при  $c < 10^{-2}$ ,  $T_0 < 0,1^\circ \text{ К}$ . Следует иметь также в виду, что при низких температурах становится существенным взаимодействие атомов примеси между собой. Энергия такого взаимодействия порядка  $Uc$ , где  $U$  — характеристическая энергия, для случая  $\text{He}^3$  — порядка нескольких градусов.

В классической области (при  $T > T_0$ ) можно легко получить термодинамические функции для слабых растворов. Поскольку примеси участвуют в нормальном движении, они дают вклад в нормальную плотность  $\rho_{ni}$ , который может быть вычислен по общей формуле (4.4) \*)

$$\rho_{ni} = -\frac{1}{3} \int p^2 \frac{\partial n}{\partial \epsilon} d\tau.$$

Подставив сюда больцмановскую функцию распределения

$$n = N_0 c (2\pi m^* k T)^{-3/2} e^{-p^2/2m^* k T}, \quad (54.4)$$

получаем очевидный результат

$$\rho_{ni} = \frac{\rho c m^*}{m} \quad (54.5)$$

( $c$  — атомная концентрация). При достаточно низких температурах вклад элементарных возбуждений — фононов и ротонных — в нормальную плотность  $\rho_{n0}$  быстро убывает, и постоянный вклад примесей  $\rho_{ni}$  может превосходить первый. При концентрации  $c \sim 10^{-2}$   $\rho_{n0} \approx \rho_{ni}$  при температуре  $T \approx 1^\circ \text{ К}$ .

**Э н т р о п и я.** Применение общих формул термодинамики слабых растворов дает для энтропии  $1 \text{ см}^3$  раствора следующее выражение:

$$S = S_0 + k N_0 c \ln \left[ \frac{(2s+1)}{N_0 c} \left( \frac{m^* k T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} + \frac{5}{2} \right]; \quad (54.6)$$

$S_0$  — энтропия чистого гелия.

**Т е п л о е м к о с т ь.** Теплоемкость  $1 \text{ см}^3$  гелия, содержащего примеси, равна

$$C = C_0 + \frac{3}{2} N_0 c k; \quad (54.7)$$

$C_0$  — теплоемкость чистого гелия.

Вклад примесей в теплоемкость оказывается менее заметным, чем в энтропию и в нормальную плотность.

\*) Все дальнейшие вычисления производим для физически интересного случая, когда спектр имеет вид (54.1).

## § 55. Уравнения гидродинамики растворов [12, 34]

Основное свойство растворов, которое используется при выводе уравнений гидродинамики, это — полное увлечение примесей нормальным движением. Для слабых растворов это утверждение строго доказано. Можно привести ряд аргументов в пользу того, что и для концентрированных растворов имеет место такая же ситуация, т. е. примеси при всех концентрациях участвуют только в нормальном движении. Строгое теоретическое доказательство этого утверждения отсутствует. Однако для наиболее интересного случая, когда примесями являются атомы изотопа  $\text{He}^3$ , эксперимент по измерению нормальной плотности раствора подтверждает это. Здесь следует сделать несколько оговорок. По-видимому, такая ситуация имеет место лишь в том случае, если примеси не могут сами по себе образовывать сверхтекучую жидкость. Как известно, в  $\text{He}^3$  при очень низких температурах, по-видимому, возможно спаривание с моментом, не равным нулю, и возникновение свойства сверхтекучести. Аналогичное явление спаривания возможно и в растворах. Поэтому утверждение об участии примесей только в нормальном движении не должно распространяться на столь низкие температуры, где возможна сверхтекучесть примесей \*).

Кроме того, для тех же растворов  $\text{He}^3$  в  $\text{He}^4$  на фазовой диаграмме ниже  $0,8^\circ \text{K}$  имеется область расслоения на две фазы. Мы будем рассматривать растворы вне этой области.

Итак, пусть примеси участвуют только в нормальном движении, тогда, наряду с уравнением непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } j = 0, \quad (55.1)$$

выражающим закон сохранения вещества для всей жидкости, можно написать уравнение непрерывности для при-

\*) Для смеси двух сверхтекучих жидкостей принципиально возможна ситуация, при которой в жидкости будут происходить три независимых движения: нормальное со скоростью  $v_n$  и два сверхтекучих со скоростями  $v_s$  и  $v_s'$ . Уравнения такой трехскоростной гидродинамики получены в работе [35].

месей

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho c + \text{div } \rho c v_n = 0. \quad (55.2)$$

Уравнение (55.2) представляет собой закон сохранения массы примесей, переносимых с нормальной скоростью  $v_n$ .

Далее, записываем уравнение непрерывности для энтропии, учитывающее тот факт, что энтропия также переносится только нормальным движением

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \text{div } S v_n = 0. \quad (55.3)$$

Уравнение движения

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial r_k} = 0, \quad \Pi_{ik} = \rho_s v_{si} v_{sk} + \rho_n v_{ni} v_{nk} + p \delta_{ik}, \quad (55.4)$$

выражающее закон сохранения импульса  $j$  раствора, сохраняет такой же вид, как и в чистом сверхтекучем гелии, поскольку давление, а следовательно, и тензор  $\Pi_{ik}$  для раствора и для чистого гелия II определяются одинаковым образом.

Наконец, уравнение сверхтекучего движения, помня, что  $\text{rot } v_s = 0$ , запишем в виде

$$\dot{v}_s + \nabla \left( \frac{v_s^2}{2} + \varphi \right) = 0, \quad (55.5)$$

где  $\varphi$  — неизвестная функция, подлежащая определению.

Далее, как и в случае чистого гелия II, воспользуемся законом сохранения энергии. Вычисляем производную от полной энергии раствора по времени и выражаем с помощью уравнений (55.1) — (55.2) все временные производные от термодинамических величин и скоростей через производные по координатам. При этом следует иметь в виду, что термодинамическое тождество, определяющее внутреннюю энергию  $E_0$ , содержит дополнительную переменную — концентрацию  $c$

$$dE_0 = T dS + \mu dp + Z dc + (v_n - v_s, dj_0)^*. \quad (55.6)$$

\*) Потенциал  $Z$  ниже будет выражен через химические потенциалы посторонних частиц и гелия в растворе.



Сгруппировав полученные таким образом члены под знаком дивергенции, находим выражение для вектора потока энергии

$$Q = j \left( \mu - \frac{Z}{\rho} c + \frac{v_s^2}{2} \right) + ST v_n + Z c v_n + v_n (v_n j_0), \quad (55.7)$$

а из требования, чтобы члены, не имеющие вида дивергенции, тождественно равнялись нулю, выясняется неизвестная функция  $\varphi$  в уравнении (55.5)

$$\varphi = \mu - \frac{Z}{\rho} c. \quad (55.8)$$

Таким образом, уравнение сверхтекучего движения окончательно приобретает вид

$$\dot{v}_s + \nabla \left( \frac{v_s^2}{2} + \mu - \frac{Z}{\rho} c \right) = 0. \quad (55.9)$$

Выразим встречающиеся в формулах настоящего параграфа потенциалы  $\mu$  и  $Z$  через химические потенциалы  $\mu_4$  гелия II и растворенных частиц  $\mu_3$  в растворе. Из соображений аддитивности свободную энергию раствора можно представить в виде

$$F = (N_3 m_3 + N_4 m_4) f \left( T, \frac{V}{N_3 m_3 + N_4 m_4}, \frac{N_3 m_3}{N_3 m_3 + N_4 m_4} \right). \quad (55.10)$$

Здесь  $N_4$  и  $N_3$  — числа атомов гелия II и растворенного вещества,  $m_4$  и  $m_3$  — массы соответствующих атомов,  $V$  — объем, занимаемый раствором.

Свободная энергия  $F$  единицы объема раствора, очевидно, равна

$$F = \rho f. \quad (55.11)$$

Химический потенциал  $\mu_4$  гелия II в растворе равен

$$\mu_4 = \frac{\partial F}{m_4 \partial N_4} = f - \frac{\partial f}{\partial v} v - \frac{\partial f}{\partial c} c. \quad (55.12)$$

Аналогичным образом для растворенных частиц находим

$$\mu_3 = \frac{\partial F}{m_3 \partial N_3} = f - \frac{\partial f}{\partial v} v + (1 - c) \frac{\partial f}{\partial c}, \quad (55.13)$$

$$c = \frac{N_3 m_3}{N_3 m_3 + N_4 m_4} - \text{концентрация раствора,}$$

$$v = \frac{V}{N_3 m_3 + N_4 m_4} = \frac{1}{\rho} - \text{удельный объем.}$$

Дифференцируя выражения (55.11) и учитывая соотношения (55.12) и (55.13), находим искомую связь:

$$Z = \left( \frac{\partial F}{\partial c} \right)_{\rho, T} = \rho (\mu_3 - \mu_4), \quad (55.14)$$

$$\mu = \left( \frac{\partial F}{\partial \rho} \right)_{T, c} = c \mu_3 + (1 - c) \mu_4. \quad (55.15)$$

При помощи (55.15) находим выражение для энтропии единицы массы раствора

$$\sigma = - \left( \frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_p = - c \frac{\partial \mu_3}{\partial T} - (1 - c) \frac{\partial \mu_4}{\partial T}. \quad (55.16)$$

В общем случае, ввиду наличия взаимодействия между частицами растворенного вещества и гелия II, выражения для химических потенциалов  $\mu_3$  и  $\mu_4$  не могут быть написаны. Единственный случай, когда можно написать выражения для  $\mu_3$  и  $\mu_4$ , есть случай идеального раствора:

$$\mu_3 = \mu_{30} + \frac{kT}{m_3} \ln c, \quad (55.17)$$

$$\mu_4 = \mu_{40} + \frac{kT}{m_4} \ln (1 - c) \quad (55.18)$$

( $\mu_{30}$  и  $\mu_{40}$  — химические потенциалы частиц растворенного вещества и гелия II). Для энтропии  $\sigma$  имеем согласно (55.16)

$$\sigma = (1 - c) \sigma_{40} + c \sigma_{30} - \frac{k}{m_4} (1 - c) \ln (1 - c) - \frac{k}{m_3} c \ln c. \quad (55.19)$$

Согласно (55.6) для термодинамического потенциала раствора имеет место тождество

$$\rho d\mu = - S dT + dp + Z dc - j_0 d(v_n - v_s). \quad (55.20)$$

Из тождества (55.20) для случая небольших значений разности скоростей ( $v_n - v_s$ ) (см. § 17) следует

интегральное соотношение

$$\mu = \mu_c(p, T, c) - \frac{p_n}{2\rho}(v_n - v_s)^2, \quad (55.24)$$

где потенциал  $\mu_c$  удовлетворяет тождеству

$$\rho d\mu_c = -SdT - dp + Zdc. \quad (55.22)$$

Комбинация потенциалов  $\mu$  и  $Z$ , содержащаяся в уравнении движения (55.19), согласно (55.17) и (55.15) выражается через химические потенциалы:

$$\mu - \frac{Z}{\rho}c = c\mu_3 + (1-c)\mu_4 - c(\mu_3 - \mu_4) = \mu_4. \quad (55.23)$$

Для слабых растворов и небольших значений разности  $(v_n - v_s)$  согласно (55.18) указанная комбинация равна

$$\mu - \frac{Z}{\rho}c = \mu_0 - \frac{kTc}{m_4} = \mu_0(p, T) - \frac{kTc}{m_4}. \quad (55.24)$$

В этом случае уравнение (55.19) приобретает вид

$$\dot{v}_s + \nabla \left\{ \mu_0(p, T) + \frac{v_s^2}{2} - \frac{p_n}{2\rho}(v_n - v_s)^2 - \frac{kTc}{m_4} \right\} = 0. \quad (55.25)$$

Из уравнений (55.4) и (55.9) следуют условия равновесия для растворов. В состоянии равновесия, когда  $v_n = v_s = 0$ , имеем

$$p = \text{const}, \quad (55.26)$$

$$\mu - \frac{Z}{\rho}c = \text{const}. \quad (55.27)$$

Для слабых растворов условие (55.27) записывается в виде

$$\mu_0(p, T) - \frac{kTc}{m_4} = \text{const},$$

или в дифференциальной форме ( $dp = 0$ ):

$$-s_0dT - \frac{k}{m_4}d(cT) = 0. \quad (55.28)$$

Таким образом, в растворе, в отличие от чистого гелия II, можно в стационарных условиях создать градиент

температуры: при этом автоматически возникает градиент концентрации. Уже при небольшом градиенте температуры в слабом растворе почти все примеси соберутся на холодном конце.

## § 56. Диссипативные процессы в растворах

Остановимся на диссипативных процессах в растворах; при выяснении этого вопроса действуем совершенно аналогично тому, как это делалось для чистого гелия II. В этом случае имеем дополнительные члены в уравнениях движения и в уравнении непрерывности для растворенных частиц:

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_k}(\Pi_{ik} + \tau_{ik}) = 0 \quad (\tau_{ik} = \tau\delta_{ik} + \mu_{ik}), \quad (56.1)$$

$$\dot{v}_s + \nabla \left( \mu - \frac{Z}{\rho}c + \frac{v_s^2}{2} + h \right) = 0, \quad (56.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial T}(\rho c) + \text{div}(\rho c v_n + g) = 0. \quad (56.3)$$

Дополнительные члены учитывают возможные диссипативные процессы. Затем из закона сохранения энергии получаем выражение потока энергии

$$Q = j \left( \mu - \frac{Z}{\rho}c + \frac{v_s^2}{2} \right) + Zc v_n + ST v_n + v_n(v_n j_0) + h(j - \rho v_n)_s + \tau v_n + q + v(v_k = v_n \mu_{ik}) \quad (56.4)$$

и уравнение, определяющее скорость изменения энтропии,

$$T \left\{ \dot{S} + \text{div} \left( S v_n + \frac{q}{T} - \frac{gZ}{\rho T} \right) \right\} = - \left\{ h \text{div}(j - \rho v_n) + \tau \text{div} v_n + \frac{1}{2} \mu_{ik} \left( \frac{\partial v_{ni}}{\partial r_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial r_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_{nl}}{\partial r_l} \right) + \frac{q \nabla T}{T} + g T \nabla \frac{Z}{\rho T} \right\}. \quad (56.5)$$

Далее, из положительности диссипативной функции заключаем, что неизвестные коэффициенты должны иметь

вид

$$\tau = -\zeta_1 \operatorname{div} (j - \rho v_n) - \zeta_2 \operatorname{div} v_n, \quad (56.6)$$

$$h = -\zeta_3 \operatorname{div} (j - \rho v_n) - \zeta_4 \operatorname{div} v_n, \quad (56.7)$$

$$\mu_{ik} = \eta \left( \frac{\partial v_{ni}}{\partial r_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial r_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_{nl}}{\partial r_l} \right), \quad (56.8)$$

$$q = -\alpha \nabla \frac{Z}{\rho T} - \beta \frac{1}{T^2} \nabla T, \quad (56.9)$$

$$q = -\gamma \nabla \frac{Z}{\rho T} - \delta \frac{1}{T^2} \nabla T. \quad (56.10)$$

В силу принципа симметрии кинетических коэффициентов имеют место два соотношения:

$$\zeta_1 = \zeta_4, \quad \beta = \gamma. \quad (56.11)$$

Коэффициенты  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$  имеют смысл коэффициентов второй вязкости раствора;  $\eta$  — коэффициент первой вязкости раствора. В выражении для теплового потока  $q$  удобно исключить  $\nabla(Z/\rho T)$ , выразив эту величину через поток примесей  $g$  и  $\nabla T$ :

$$-q = \frac{\gamma}{\alpha} g + \left( \delta - \frac{\beta \gamma}{\alpha} \right) \frac{\nabla T}{T^2}. \quad (56.12)$$

Коэффициент теплопроводности определяем таким образом, чтобы при равном нулю потоке  $g$  поток тепла равнялся бы  $-\kappa \nabla T$ . Таким образом, имеем

$$\kappa = \left( \delta - \frac{\beta \gamma}{\alpha} \right) \frac{1}{T^2}. \quad (56.13)$$

Далее, аналогично тому, как это делается в обычных растворах, переходим в выражении для потока примесей  $g$  к обычным переменным  $p, T$  и  $c$  и вводим обозначения:

$$D = \frac{\alpha}{\rho} \frac{\partial}{\partial c} \left( \frac{Z}{\rho T} \right), \quad (56.14)$$

$$\rho D k_T = \alpha T \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{Z}{\rho T} \right) + \frac{\beta}{T}. \quad (56.15)$$

$$k_p = \frac{\rho \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{Z}{\rho T} \right)}{\frac{\partial}{\partial c} \left( \frac{Z}{\rho T} \right)}. \quad (56.16)$$

После этого потоки  $g$  и  $q$  приобретают вид

$$-g = \rho D \left( \nabla c + \frac{k_T}{T} \nabla T + \frac{k_p}{p} \nabla p \right), \quad (56.17)$$

$$-q = T^2 \left( \frac{\partial}{\partial T} \frac{Z}{\rho T} - \frac{k_T}{T} \frac{\partial}{\partial c} \frac{Z}{\rho T} \right) g + \kappa \nabla T. \quad (56.18)$$

Величина  $D$  является коэффициентом диффузии, а  $k_T D$  — коэффициентом термодиффузии. Величину  $k_p D$  называют коэффициентом бародиффузии. Этот последний существует лишь при наличии градиента давления. Он не зависит от кинетики и полностью определяется термодинамическими свойствами раствора.

Выясним теперь, как выглядят потоки  $g$  и  $q$  в стационарных условиях. Согласно уравнениям (55.26) и (55.27) в стационарных условиях (при малых градиентах)

$$p = \text{const}, \quad \mu - \frac{Z}{\rho} c = \text{const}.$$

С помощью термодинамического тождества (55.22) находим связь между градиентами концентрации и температуры в стационарных условиях:

$$\nabla c \frac{\partial}{\partial c} \frac{Z}{\rho} = - \left[ \frac{S}{\rho c} + \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{Z}{\rho} \right) \right] \nabla T = \nabla T \frac{\partial}{\partial c} \left( \frac{S}{\rho c} \right). \quad (56.19)$$

В стационарных условиях полный поток растворенных частиц равен нулю:

$$g + \rho c v_n = 0, \quad (56.20)$$

а полный поток тепла равен выделяемой на единицу поверхности гелия мощности  $Q$ :

$$Q = (Zc + ST) v_n + q. \quad (56.21)$$

Скорость  $v_n$  в стационарных условиях не равна нулю; из уравнения (55.4) следует в этом случае равенство нулю только полного импульса. Согласно (56.19) и (56.20)

оба потока  $g, q$  и скорость  $v_n$  в стационарных условиях пропорциональны градиенту температуры. Мы выразим их через  $\nabla T$  и подставим в формулу (56.21). Таким путем находим

$$Q = -\kappa \nabla T - \rho D \frac{T}{\frac{\partial}{\partial c} \left( \frac{Z}{\rho} \right)} \left\{ c \frac{\partial}{\partial c} \left( \frac{S}{\rho c} \right) + \frac{k_T}{T} \frac{\partial}{\partial c} \left( \frac{Z}{\rho} \right) \right\}^2 \nabla T. \quad (56.22)$$

Теперь видно, что для характеристики растворов удобно ввести некоторую эффективную теплопроводность  $\kappa_{\text{эфф}}$ , которая является определенной комбинацией коэффициентов диффузии, термодиффузии и теплопроводности и равна

$$\kappa_{\text{эфф}} = \kappa + \rho D \frac{T}{\frac{\partial}{\partial c} \left( \frac{Z}{\rho} \right)} \left\{ c \frac{\partial}{\partial c} \left( \frac{S}{\rho c} \right) + \frac{k_T}{T} \frac{\partial}{\partial c} \left( \frac{Z}{\rho} \right) \right\}^2. \quad (56.23)$$

Эффективная теплопроводность  $\kappa_{\text{эфф}}$  связывает  $\nabla T$  с выделяемой в растворе мощностью:

$$Q = -\kappa_{\text{эфф}} \nabla T. \quad (56.24)$$

С помощью формул (55.17), (55.18) вычислим  $\kappa_{\text{эфф}}$  для слабых растворов:

$$\kappa_{\text{эфф}} = \kappa + \frac{\rho D m_s}{k c} \left\{ \left( \sigma_0 + \frac{k c}{m_s} \right) - \frac{k}{m_s} k_T \right\}^2 \quad (56.25)$$

( $\sigma_0$  — энтропия единицы массы чистого гелия II). Для достаточно слабых растворов второй член в формуле (56.25) обратно пропорционален концентрации раствора и превосходит коэффициент теплопроводности  $\kappa$ . Заметим здесь, что в чистом гелии II при наличии  $\nabla T$  отсутствует стационарное решение уравнений гидродинамики. В стационарном случае из постоянства давления  $p$  и потенциала  $\mu$  следует постоянство температуры в гелии.

Запишем теперь в окончательном виде уравнения гидродинамики растворов в гелии II с диссипативными

членами:

$$\left. \begin{aligned} \rho + \operatorname{div} j &= 0, \\ \frac{\partial j_i}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial r_k} &= \frac{\partial}{\partial r_k} \left\{ \eta \left( \frac{\partial v_{ni}}{\partial r_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial r_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_{nl}}{\partial r_l} \right) \right\} + \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial r_i} \{ \zeta_1 \operatorname{div} (j - \rho v_n) + \zeta_2 \operatorname{div} v_n \}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \rho c + \operatorname{div} \rho c v_n &= \\ &= \operatorname{div} \left\{ \rho D \left( \nabla c + \frac{k_T}{T} \nabla T + \frac{k_p}{p} \nabla p \right) \right\}, \\ \dot{v}_s + \nabla \left( \mu - \frac{Z}{\rho} c + \frac{v_s^2}{2} \right) &= \\ &= \nabla \{ \zeta_3 \operatorname{div} (j - \rho v_n) + \zeta_4 \operatorname{div} v_n \}. \end{aligned} \right\} \quad (56.26)$$

Согласно тем же соотношениям уравнение возрастания энтропии приобретает вид

$$T \left\{ \dot{S} + \operatorname{div} \left( S v_n + \frac{q - \frac{Zg}{\rho}}{T} \right) \right\} = R, \quad (56.27)$$

$$\begin{aligned} R &= \zeta_3 [\operatorname{div} (j - \rho v_n)]^2 + \zeta_2 [\operatorname{div} v_n]^2 + \\ &\quad + 2\zeta_1 \operatorname{div} (j - \rho v_n) \operatorname{div} v_n + \\ &\quad + \frac{1}{2} \eta \left( \frac{\partial v_{ni}}{\partial r_k} + \frac{\partial v_{nk}}{\partial r_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_{nl}}{\partial r_l} \right)^2 + \frac{\kappa (\nabla T)^2}{T} + \\ &\quad + \rho D \frac{\partial}{\partial c} \left( \frac{Z}{\rho} \right) \left[ \nabla c + \frac{k_T}{T} \nabla T + \frac{k_p}{p} \nabla p \right]^2. \end{aligned} \quad (56.28)$$

### § 57. Звук в растворах посторонних частиц в гелии II

Воспользуемся системой уравнений (55.1) — (55.5) и получим формулы, определяющие скорость звука в растворах произвольной концентрации. Указанная система,

будучи линеаризована, запишется в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} &= 0, & \frac{\partial j}{\partial t} + \Delta p &= 0, \\ \frac{\partial \rho \sigma}{\partial t} + \rho \sigma \operatorname{div} \mathbf{v}_n &= 0, & \frac{\partial \rho c}{\partial t} + \rho c \operatorname{div} \mathbf{v}_n &= 0, \\ \frac{\partial v_s}{\partial t} + \nabla \left( \mu - \frac{Z}{\rho} c \right) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (57.1)$$

Исключим из системы (57.1) скорости  $\mathbf{v}_n$  и  $\mathbf{v}_s$ ; в результате получим три уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\rho_n}{\rho_s} \frac{\ddot{\sigma}}{\sigma} &= \sigma \Delta T + c \Delta \frac{Z}{\rho}, \\ \ddot{\rho} &= \Delta p, & \frac{\dot{c}}{c} &= \frac{\dot{\sigma}}{\sigma}. \end{aligned} \right\} \quad (57.2)$$

Выберем в качестве независимых переменных температуру  $T$ , давление  $p$  и концентрацию  $c$ . В звуковой волне эти величины можно представить в виде сумм постоянных равновесных значений и небольших добавок, которые мы будем обозначать теми же буквами со штрихом. Ищем решение системы (57.2), соответствующее плоской волне; в этом случае указанные небольшие добавки изменяются по закону  $\exp[-i\omega(t - x/u)]$  ( $x$  — направление распространения волны,  $u$  — скорость звука). Представив все величины в системе (57.2) в таком виде, получаем

$$\left. \begin{aligned} &\left\{ \frac{\rho_n}{\rho_s \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial T} u^2 - \sigma - c \frac{\partial}{\partial T} \frac{Z}{\rho} \right\} T' + \\ &\quad + \left\{ \frac{\rho_n}{\rho_s \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial p} u^2 - c \frac{\partial}{\partial p} \frac{Z}{\rho} \right\} p' + \\ &\quad + \left\{ \frac{\rho_n}{\rho_s \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial c} u^2 - c \frac{\partial}{\partial c} \frac{Z}{\rho} \right\} c' = 0, \\ &\frac{\partial \rho}{\partial T} u^2 T' + \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} u^2 - 1 \right) p' + \frac{\partial \rho}{\partial c} u^2 c' = 0, \\ &c \frac{\partial \sigma}{\partial T} T' + c \frac{\partial \sigma}{\partial p} p' + \left( c \frac{\partial \sigma}{\partial c} - \sigma \right) c' = 0. \end{aligned} \right\} \quad (57.3)$$

Условие совместности полученной системы дает уравнение, определяющее скорость звука в растворе:

$$u^4 \frac{\rho_n}{\rho_s} \left\{ \frac{d\sigma}{dT} \frac{dp}{dp} - \frac{d\sigma}{dp} \frac{dp}{dT} \right\} - u^2 \left\{ \frac{dp}{dp} \left( \sigma + c \frac{d}{dT} \frac{Z}{\rho} \right) \sigma + \right. \\ \left. + \frac{\rho_n}{\rho_s} \frac{d\sigma}{dT} - \frac{dp}{dT} \frac{d}{dp} \left( \frac{Z}{\rho} \right) \sigma c \right\} + \sigma \left( \sigma + c \frac{d}{dT} \frac{Z}{\rho} \right) = 0. \quad (57.4)$$

Для краткости мы ввели полные производные

$$\frac{df}{dT} = \frac{\partial f}{\partial T} + \frac{\partial f}{\partial c} \frac{c}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial T}, \quad \frac{df}{dp} = \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial c} \frac{c}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial p}, \quad (57.5)$$

$$\bar{\sigma} = \sigma - c \frac{\partial \sigma}{\partial c} \quad (57.6)$$

( $f$  — одна из трех термодинамических функций  $\sigma$ ,  $\rho$ ,  $Z/\rho$ ). Уравнение (57.4) мало пригодно для исследования ввиду его чрезвычайной громоздкости. Воспользуемся упрощающим обстоятельством, состоящим в том, что производная  $\partial \rho / \partial T$  практически оказывается всегда чрезвычайно малой. Пренебрегаем в (57.4) всеми членами, содержащими указанную производную; кроме того, воспользуемся соотношениями, вытекающими из термодинамического тождества

$$d\mu = \frac{1}{\rho} dp - \sigma dT + \frac{Z}{\rho} dc,$$

а именно:

$$\frac{\partial}{\partial p} \frac{Z}{\rho} = - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial c}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial p} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial T}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial c} = - \frac{\partial}{\partial T} \frac{Z}{\rho}. \quad (57.7)$$

В результате уравнение (57.4) приобретает вид

$$u^4 - u^2 \left\{ \frac{\rho_s}{\rho_n} \left[ \frac{\sigma^2}{\partial T} + c^2 \frac{\partial}{\partial c} \left( \frac{Z}{\rho} \right) \right] + \frac{\left[ 1 + \frac{\rho_s}{\rho_n} \left( \frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial c} \right)^2 \right]}{\frac{\partial \rho}{\partial p}} \right\} + \\ + \frac{\frac{\rho_s}{\rho_n} \left[ \frac{\bar{\sigma}^2}{\partial T} + c^2 \frac{\partial}{\partial c} \left( \frac{Z}{\rho} \right) \right]}{\frac{\partial \rho}{\partial p}} = 0. \quad (57.8)$$

Решим это уравнение относительно  $u^2$  и воспользуемся тем, что один из корней,  $u_1^2$ , определяющий скорость первого звука, значительно превосходит по величине второй,  $u_2^2$ , определяющий скорость второго звука; в результате находим ( $u_2^2 \ll u_1^2$ )

$$u_1^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{c,T} \left[ 1 + \frac{\rho_s}{\rho_n} \left( \frac{\partial \rho}{\partial c} \frac{c}{\rho} \right)^2 \right], \quad (57.9)$$

$$u_2^2 = \frac{\frac{\rho_s}{\rho_n} \left[ \bar{\sigma}^2 \left( \frac{\partial T}{\partial \sigma} \right)_{c,p} + c^2 \frac{\partial}{\partial c} \left( \frac{Z}{\rho} \right) \right]}{\left[ 1 + \frac{\rho_s}{\rho_n} \left( \frac{\partial \rho}{\partial c} \frac{c}{\rho} \right)^2 \right]}. \quad (57.10)$$

В первом приближении при малых значениях концентрации скорость первого звука не зависит от концентрации \*). Скорость же второго звука содержит линейные по концентрации  $c$  члены  $\bar{\sigma}$  и  $c^2 \frac{\partial}{\partial c} \frac{Z}{\rho}$  (потенциал  $Z$  зависит от концентрации  $c$  по логарифмическому закону). Величины  $\sigma$  и  $\partial/\partial c (Z/\rho)$ , определяющие скорость второго звука (57.10), для идеального раствора равны

$$\bar{\sigma} = \sigma - c \frac{\partial \sigma}{\partial c} = \sigma_{40} - \frac{k}{m_4} [c + \ln(1 - c)] + \frac{k}{m_3} c, \quad (57.11)$$

$$c^2 \frac{\partial}{\partial c} \frac{Z}{\rho} = kT \left[ \frac{c^2}{m_4(1 - c)} + \frac{c}{m_3} \right]. \quad (57.12)$$

Для слабых растворов выражения (57.11) и (57.12) образуются в

$$\bar{\sigma} = \sigma_{40} + \frac{kc}{m_3}, \quad c^2 \frac{\partial}{\partial c} \frac{Z}{\rho} = \frac{kTc}{m_3},$$

\*) Подчеркнем, что этот результат получается только в предположении, что  $\partial \rho / \partial T = 0$ , так как точное выражение для  $u_2^2$ , вытекающее из уравнения (57.4), содержит члены, линейные по концентрации и пропорциональные произведению  $(\partial \rho / \partial T)(\partial \rho / \partial c)$ .

а формула (57.10) — в

$$u_2^2 = \frac{\rho_s}{\rho_n} \left[ \frac{\partial T}{\partial \sigma} \left( \sigma_{40} + \frac{kc}{m_3} \right)^2 + \frac{kTc}{m_3} \right] *). \quad (57.13)$$

Заметим, что в растворах изотопов  $\text{He}^3$  и  $\text{He}^4$  звуковые явления качественно отличаются от случая чистого  $\text{He}^4$ . Так, в растворах, как это следует из формул (57.1) и (57.3), в волне первого звука происходят колебания относительной скорости  $v_n - v_s$ , а в волне второго звука происходят колебания давления (ср. § 20).

\*) Молярная концентрация  $\varepsilon = \frac{N_3}{(N_3 + N_4)}$  связана с концентрацией  $c$ , фигурирующей в наших формулах, соотношением  $\frac{1}{\varepsilon} - 1 = \frac{m_3}{m_4} \left( \frac{1}{c} - 1 \right)$ .

## ГЛАВА XIV

## ТЕОРИЯ ФЕРМИ-ЖИДКОСТИ

## § 58. Введение

Теория сверхтекучести описывает свойства так называемых бозе-жидкостей, т. е. квантовых систем взаимодействующих частиц, возбуждения которых подчиняются статистике Бозе.

Однако, кроме таких жидкостей, существуют и другие, составляющие гораздо более обширную группу, так называемые ферми-жидкости, возбуждения которых обладают спином  $1/2$  и подчиняются статистике Ферми. Сюда относятся жидкий гелий-3, электроны в металлах и, возможно, тяжелые ядра, хотя, конечно, последний случай является совершенно специфическим.

Последовательная теория ферми-жидкостей была создана Л. Д. Ландау в 1956 г. [36]. Им было показано, что в противоположность бозе-жидкостям в ферми-жидкостях весьма существенную роль играет взаимодействие возбуждений, так что возбуждения в ферми-жидкости не во всех случаях могут рассматриваться как идеальный газ.

Прежде чем перейти к изложению теории, мы для удобства дальнейших применений напомним основные свойства жидкого гелия-3. Изотоп гелия с атомным весом 3 сжижается при температуре  $3,2^\circ \text{K}$  (критическая точка  $T_c = 3,3^\circ$ ,  $p_c = 845 \text{ мм рт. ст.}$ ) и вплоть до самых низких температур и при давлениях, меньших 30 атмосфер, остается жидким. Это объясняется теми же причинами, что и в случае гелия-4: слабостью взаимодействия между атомами и малостью их массы. Последнее обстоятельство приводит к тому, что длина волны де Бройля,

соответствующая движению атомов гелия-3 при низких температурах, может быть больше их взаимного расстояния, т. е. жидкость становится квантовой.

Вплоть до самых низких обследованных температур жидкий гелий-3 не становится сверхтекучим. Ввиду того что согласно теории Л. Д. Ландау всякая бозе-жидкость должна обладать сверхтекучестью, в то время как ферми-жидкость не обладает этим свойством, гелий-3 следует считать ферми-жидкостью. Надо сказать, что это обстоятельство не является тривиальным и не следует автоматически из того факта, что атомы гелия-3 обладают спином  $1/2$ . Система таких атомов могла бы обладать исключительно бозевскими возбуждениями. Более того, как мы увидим в дальнейшем, такие возбуждения действительно существуют, хотя и не играют существенной роли в определении свойств гелия-3. Только отсутствие сверхтекучести позволяет с уверенностью считать гелий-3 настоящей ферми-жидкостью.

## § 59. Энергия возбуждений

Возможность описания возбужденного состояния жидкого гелия-3 при помощи газа квазичастиц с соответствующей функцией распределения по энергиям основывается на том факте, что эффективность столкновений частиц ферми-газа быстро уменьшается с понижением температуры. Действительно, из общих соображений ясно, что время между соударениями пропорционально квадрату размытия ферми-распределения, т. е. в среднем квадрату температуры. В то же время сама средняя энергия (отсчитанная от граничной энергии) ферми-частиц, находящихся в зоне размытия, которые определяют макроскопические свойства системы, пропорциональна первой степени температуры. Благодаря этому «неопределенность энергии», обязанная столкновениям, при достаточно низких температурах будет мала по сравнению с самой средней энергией. Можно также сказать, что затухание возбуждений, описываемое мнимой добавкой к их энергии, при достаточно низких температурах будет мало по сравнению с их энергией.

В основе теории Л. Д. Ландау лежат два фундаментальных предположения. Первое из них заключается в том, что классификация уровней ферми-жидкости соответствует классификации уровней невзаимодействующих атомов. Это означает, что при постепенном включении взаимодействия атомы постепенно переходят в «квазичастицы», каждая из которых обладает определенной энергией. Таким образом, число квазичастиц равно числу атомов.

Второе предположение заключается в том, что взаимодействие квазичастиц может быть учтено с помощью самосогласованного поля окружающих частиц, которое проявляется в том, что энергия системы не равна сумме энергий квазичастиц, а является функционалом от их функции распределения. Энергия квазичастиц должна определяться как вариационная производная плотности энергии в импульсном пространстве, т. е.

$$\delta E = \int \epsilon \delta n d\tau, \quad (59.1)$$

где  $d\tau = 2dp_x dp_y dp_z / (2\pi\hbar)^3$ . Множитель 2 в  $d\tau$  учитывает наличие спина  $1/2$  у квазичастиц.

В некоторых случаях необходимо учитывать зависимость энергии частиц от их спина. Благодаря тому, что спин является квантовомеханической величиной, функцию распределения необходимо считать в этом случае статистическим оператором и вместо формулы (59.1) пользоваться определением  $\epsilon$  в виде

$$\delta E = \frac{1}{2} \text{Sp}_\sigma \int \epsilon \delta n d\tau. \quad (59.2)$$

Определение энергии частиц по формуле (59.2) приводит к тому, что их равновесная функция распределения действительно является функцией Ферми. Для доказательства этого наиболее удобно воспользоваться выражением энтропии \*)

$$S = -\frac{1}{2} \text{Sp}_\sigma \int \{n \ln n + (1-n) \ln (1-n)\} d\tau, \quad (59.3)$$

\*) Здесь и в дальнейшем мы употребляем энергетические единицы для температуры, т. е.  $k = 1$ .

так как эта формула имеет чисто комбинаторное происхождение. Из условия максимальности энтропии при соблюдении постоянства числа частиц и энергии

$$N = \frac{1}{2} \text{Sp}_\sigma \int n d\tau = \text{const}, \quad E = \text{const},$$

можно путем варьирования по  $\delta n$  найти функцию распределения

$$n(\epsilon) = n_F(\epsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon - \mu}{T}} + 1}. \quad (59.4)$$

Энергия  $\epsilon$ , будучи функционалом от  $n$ , зависит от температуры. Эту зависимость можно представить в следующей форме. Если обозначить через  $\epsilon_0(p, \sigma)$  равновесную энергию квазичастиц при  $T = 0$ , то при малом отклонении от равновесия или при небольших  $T$  она будет выражаться формулой

$$\begin{aligned} \epsilon &= \epsilon_0(p, \sigma) + \delta \epsilon(p, \sigma) = \\ &= \epsilon_0(p, \sigma) + \frac{1}{2} \text{Sp}_\sigma \int f(p, \sigma; p', \sigma') \delta n(p', \sigma') d\tau'. \end{aligned} \quad (59.5)$$

Здесь  $\delta n = n - n_F(T = 0)$ , а  $f$  — оператор, зависящий от импульсов и операторов спина двух частиц. Ввиду своего определения, как второй вариационной производной от  $E$  по  $\delta n$ , функция  $f$  должна быть симметрична относительно перестановки  $p, \sigma$  с  $p', \sigma'$ . Функция является очень важной характеристикой ферми-жидкости, она связана с амплитудой рассеяния вперед двух квазичастиц (см. § 70).

## § 60. Эффективная масса

Ввиду того что речь идет о низких температурах, при отсутствии внешнего поля энергия  $\epsilon_0$  может быть записана в виде

$$\epsilon_0 - \mu(0) = v(p - p_0), \quad (60.1)$$

где  $p_0$  — граничный импульс Ферми, а  $v$  — скорость на Ферми-границе. Эту скорость можно записать в виде

$$v = \frac{p_0}{m^*}, \quad (60.2)$$



где  $m^*$  — эффективная масса. Между  $m^*$  и  $f$  существует определенная связь, являющаяся следствием принципа относительности Галилея.

Согласно принципу Галилея импульс единицы объема должен быть равен потоку массы жидкости. Ввиду того что скорость квазичастиц может быть определена как производная  $\partial \varepsilon / \partial p$ , а их число равно числу атомов, получаем:

$$\frac{1}{2} \text{Sp}_\sigma \int p n d\tau = \frac{1}{2} \text{Sp}_\sigma \int m \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} n d\tau, \quad (60.3)$$

где  $m$  — масса атома.

Возьмем вариацию по  $n$  от этого соотношения

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Sp}_\sigma \int p \delta n d\tau &= \frac{1}{2} \text{Sp}_\sigma \int m \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \delta n d\tau + \\ &+ \frac{1}{2} \text{Sp}_\sigma \text{Sp}_{\sigma'} \iint m n \frac{\partial}{\partial p} f(p, \sigma, p', \sigma') \delta n' d\tau d\tau'. \end{aligned}$$

Переобозначая в последнем члене  $p, \sigma$  и  $p', \sigma'$  и пользуясь произвольностью  $\delta n$ , находим

$$\frac{p}{m} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} + \frac{1}{2} \text{Sp}_\sigma \int \frac{\partial f}{\partial p} n' d\tau' = \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} - \frac{1}{2} \text{Sp}_\sigma \int f \frac{\partial n'}{\partial p} d\tau. \quad (60.4)$$

Если система не находится во внешнем магнитном поле, то и соотношение (60.4) не теряет общности при взятии  $1/2 \text{Sp}_\sigma$ . В случае равновесия при  $T = 0$  в формуле (60.4)  $\varepsilon$  может быть взято в форме (60.1), а  $\partial n / \partial p$  заменено на  $-\delta(p - p_0)$ . При этом находим

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m^*} + \frac{p_0}{2(2\pi\hbar)^3} \text{Sp}_\sigma \text{Sp}_{\sigma'} \int f(\chi) \cos \chi d\Omega, \quad (60.5)$$

где  $f(\chi)$  — значение функции  $f$ , когда  $|p| = |p'| = p_0$ . Естественно, что с точностью до малой поправки это соотношение сохранится при температурах вблизи  $T = 0$  и при малых отклонениях от равновесия.

### § 61. Теплоемкость и энтропия

Здесь мы не будем предполагать внешнего магнитного поля, так что величины не будут зависеть от спина. Знание энергетического спектра дает возможность определить теплоемкость ферми-жидкости. Ее можно найти,

как обычно, с помощью дифференцирования энергии по температуре при заданном числе частиц.

При этом существенным является то обстоятельство, что изменение плотности энергии выражается формулой (59.1), благодаря чему мы можем написать

$$C = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_N = \int \varepsilon \left( \frac{\partial n}{\partial T} \right)_N d\tau \cong \int \varepsilon_0 \left( \frac{\partial n}{\partial T} \right)_N d\tau. \quad (61.1)$$

Замена  $\varepsilon$  на  $\varepsilon_0$  в данном случае оправдана тем обстоятельством, что, в то время как основной член в теплоемкости оказывается линейным по  $T$ , поправка в (59.5) дает лишь кубические члены.

Действительно,  $\delta n$  в формуле (59.5) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \delta n &= n(T) - n(0) = \\ &= \int_0^T \frac{\partial n}{\partial T} dT = \int_0^T \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \left( -\frac{\varepsilon - \mu}{T} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} - \frac{\partial \mu}{\partial T} \right) dT. \end{aligned}$$

Как известно, при низких температурах производная фермиевской функции имеет вид

$$\frac{\partial n}{\partial \varepsilon} \approx -\delta(\varepsilon - \mu) - \frac{\pi^2}{6} T^2 \frac{\partial^2 \delta(\varepsilon - \mu)}{\partial \varepsilon^2}.$$

Ввиду этого

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon &= \int f \delta n' d\tau' = \\ &= \frac{\pi^2}{6} T^2 \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon'} \left( f \frac{d\tau'}{d\varepsilon'} \right) \right]_{\varepsilon'=\mu} - \int_0^T \left[ f \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} - \frac{\partial \mu}{\partial T} \right) \frac{d\tau'}{d\varepsilon'} \right]_{\varepsilon'=\mu} dT. \end{aligned} \quad (61.2)$$

Производная  $\partial \mu / \partial T$  равна энтропии, которая, как мы увидим, линейна по  $T$ . Что же касается члена с  $\partial \varepsilon' / \partial T$ , то его порядок можно установить с помощью формулы (61.2). Дифференцируя эту формулу по  $T$ , без труда находим, что  $\partial \varepsilon / \partial T$  — первого порядка по  $T$ , а следовательно,  $\delta \varepsilon$  — второго порядка,

Ввиду замены  $\varepsilon$  на  $\varepsilon_0$  энергия может быть вычислена просто как интеграл

$$E = \int \varepsilon_0 n d\tau \quad \text{при} \quad N = \int n d\tau = \text{const},$$

причем опять с точностью до кубических членов по  $T$  в функциях  $n$ , входящих в интегралы для  $E$  и  $N$ , можно заменить  $\varepsilon$  на  $\varepsilon_0$ . После этого вычисление интегралов не отличается от обычного случая ферми-газа.

Таким образом, находим

$$c = \frac{C}{N} = \gamma T; \quad \gamma = \frac{\pi^2}{3N} \left( \frac{dn}{d\varepsilon} \right)_\mu = \left( \frac{\pi}{3N} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{m^*}{\hbar^2}. \quad (61.3)$$

Ввиду линейной зависимости от температуры энтропия равна теплоемкости.

Сравнивая формулу (61.3) с экспериментальными данными по энтропии жидкого  $\text{He}^3$  при низких температурах, мы можем найти параметр  $\gamma$ , а следовательно, определить и эффективную массу. На основании этих данных можно получить значение  $\gamma$ , которое оказывается равным  $6 \text{ кал/моль} \cdot \text{град}^2$ . Ввиду равенства числа квазичастиц числу атомов мы можем по плотности жидкого  $\text{He}^3$  ( $\rho = 0,082 \text{ г/см}^3$ ) определить и граничный импульс Ферми. Таким образом, находим:

$$m^* = 3,08 m_{\text{He}^3}, \quad \frac{p_0}{\hbar} = 0,78 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}. \quad (61.4)$$

## § 62. Магнитная восприимчивость

Ввиду того что частицы, обладающие спином, обязательно имеют магнитный момент, ферми-жидкость должна быть магнетиком. В изотропном случае имеются лишь две возможности. Жидкость может быть парамагнетиком или ферромагнетиком. Антиферромагнетизм в изотропной ферми-жидкости невозможен. Мы изложим здесь лишь случай парамагнитной ферми-жидкости, что соответствует жидкому  $\text{He}^3$ .

Когда система находится в магнитном поле  $H$ , то частицы, естественно, приобретают дополнительную энер-

гию, зависящую от их спинов. Если бы они были свободными, то изменение энергии равнялось бы  $-\beta(\sigma H)$ , где  $\beta$  — магнетон Бора. Однако в ферми-жидкости необходимо учесть и то обстоятельство, что функция распределения меняется. Таким образом, получаем

$$\delta\varepsilon = -\beta(\sigma H) + \frac{1}{2} \text{Sp}_\sigma \int f \delta n' d\tau'. \quad (62.1)$$

В данном случае существенна зависимость функции  $f$  от спинов. Эта зависимость может быть в общем случае записана как

$$f(p, \sigma; p', \sigma') = f(p, p') + \zeta_{ik}(p, p') \sigma_i \sigma'_k. \quad (62.2)$$

Естественно, однако, предположить, что в основном взаимодействии спинов имеет чисто обменное происхождение. В этом случае  $f$  приобретает вид

$$f(p, \sigma; p', \sigma') = f(p, p') + \zeta(p, p') \sigma \sigma'. \quad (62.3)$$

Изменение функции распределения  $\delta n$  в формуле (62.1) связано лишь с изменением энергии  $\varepsilon$ , так как химический потенциал меняется лишь во втором порядке по  $H$ . Ввиду этого в формуле (62.1) можно подставить  $\delta n = \partial n / \partial \varepsilon \delta \varepsilon$ . Это дает

$$\delta\varepsilon = -\beta(\sigma H) + \frac{1}{2} \text{Sp}_\sigma \int f \frac{\partial n'}{\partial \varepsilon'} \delta \varepsilon' d\tau'. \quad (62.4)$$

Формула (62.4) является уравнением для  $\delta\varepsilon$ . Эту величину можно предположить имеющей вид

$$\delta\varepsilon = -\xi(\sigma H). \quad (62.5)$$

Подставляя в (62.4), получаем уравнение

$$\xi = \beta + \frac{1}{4} \int \zeta \frac{\partial n'}{\partial \varepsilon'} \xi' d\tau'. \quad (62.6)$$

Ввиду того что  $\partial n' / \partial \varepsilon' \cong -\delta(\varepsilon' - \mu)$ , интегрирование происходит по поверхности ферми-сферы. Ниже мы увидим, что для магнитной восприимчивости существенно лишь значение  $\xi$ , взятое на поверхности ферми-сферы.

В этом случае оба аргумента  $\zeta(p, p')$  по модулю равны  $p_0$ , и  $\zeta$  зависит лишь от угла между ними. Обозначая  $\int \zeta(\theta) \frac{d\Omega}{4\pi}$  через  $\bar{\zeta}$ , получаем из уравнения (62.6)

$$\xi = \frac{\beta}{1 + \frac{1}{4} \bar{\zeta} \left( \frac{d\tau}{d\varepsilon} \right)_\mu}. \quad (62.7)$$

Восприимчивость определяется из формулы

$$\chi = \frac{\partial}{\partial H} \frac{1}{2} \text{Sp} \int n \beta \sigma d\tau.$$

В этом выражении, естественно, участвует лишь добавка к  $n$ , зависящая от спина. Таким образом находим:

$$\chi = \frac{1}{4} \beta \xi \left( \frac{d\tau}{d\varepsilon} \right)_\mu = \frac{\frac{1}{4} \beta^2 \left( \frac{d\tau}{d\varepsilon} \right)_\mu}{1 + \frac{1}{4} \bar{\zeta} \left( \frac{d\tau}{d\varepsilon} \right)_\mu}. \quad (62.8)$$

Величину  $(d\tau/d\varepsilon)_\mu$  можно выразить через коэффициент  $\gamma$  в линейном законе теплоемкости; это дает

$$\frac{1}{\chi} = \beta^{-2} \left( \bar{\zeta} + \frac{4\pi^2}{3\gamma N} \right). \quad (62.9)$$

Формулу (62.9) можно сравнить с экспериментальными данными по магнитной восприимчивости  $\text{He}^3$ ; при этом выясняется, что  $\bar{\zeta}$  отрицательно и составляет примерно 0,67 от второго члена. Таким образом, обменное взаимодействие существенно сказывается на величине магнитной восприимчивости жидкого  $\text{He}^3$ . Знак эффекта таков, что обменное взаимодействие способствует параллельной ориентации спинов. Однако оно не приводит к ферромагнетизму, так как фермиевская тенденция к антипараллельному расположению спинов превалирует.

### § 63. Кинетическое уравнение

Кинетическое уравнение для функции распределения при отсутствии магнитного поля имеет обычный вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial r} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} - \frac{\partial n}{\partial p} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = I(n), \quad (63.1)$$

где  $I(n)$  — интеграл столкновений. Однако здесь необходимо учитывать, что энергия  $\varepsilon$  является функционалом функции распределения  $n$ , таким образом, тоже зависит от координат. С помощью этого кинетического уравнения получим выражения для потоков энергии и импульса.

Для нахождения потока импульса уравнение (63.1) надо помножить на  $p_i$  и проинтегрировать по фазовому объему. При этом, вследствие сохранения импульса при

столкновениях, интеграл  $\int p_i I(n) d\tau$  обратится в нуль, и у нас остается уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \int p_i n d\tau + \int p_i \left( \frac{\partial n}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} - \frac{\partial n}{\partial p_k} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right) d\tau = 0.$$

Выражение в скобках во втором интеграле может быть записано как

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left( n \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} \right) - \frac{\partial}{\partial p_k} \left( n \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right).$$

Подставляя это в интеграл и интегрируя второй член по частям, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \int p_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} n d\tau + \int n \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} d\tau.$$

Последний член может быть представлен в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int n \varepsilon d\tau - \int \varepsilon \frac{\partial n}{\partial x_i} d\tau.$$

Но ввиду того, что  $\delta E = \int \varepsilon \delta n d\tau$ , последний член равен  $\delta E / \delta x_i$ . Таким образом, получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \int p_i n d\tau + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = 0. \quad (63.2)$$

Это уравнение выражает закон сохранения импульса. Тензор  $\Pi_{ik}$  представляет собой поток импульса. Он равен

$$\Pi_{ik} = \int p_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} n d\tau + \delta_{ik} \left[ \int n \varepsilon d\tau - E \right]. \quad (63.3)$$

Аналогичным образом получается и закон сохранения энергии. Для этого умножим кинетическое уравнение на  $\varepsilon$  и проинтегрируем по  $d\tau$ . Ввиду сохранения энергии при столкновениях интеграл  $\int \varepsilon I(n) d\tau$  обратится в нуль, и мы получаем

$$\int \varepsilon \frac{\partial n}{\partial t} d\tau + \int \varepsilon \left( \frac{\partial n}{\partial r} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} - \frac{\partial n}{\partial p} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right) d\tau = 0.$$

Записав член с  $\partial n / \partial r$  в виде

$$\frac{\partial}{\partial r} \int n \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} d\tau - \int n \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} d\tau - \int n \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial r \cdot \partial p} \varepsilon d\tau$$

и произведя в члене с  $\partial n / \partial p$  интегрирование по частям по  $p$ , получаем закон сохранения энергии

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \int \varepsilon \frac{\partial n}{\partial t} d\tau = - \operatorname{div} Q, \quad (63.4)$$

где поток энергии равен

$$Q = \int n \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} d\tau. \quad (63.5)$$

### § 64. Вязкость [37]

С помощью уравнения (63.1) и выражений для потоков импульса (63.2) и энергии (63.5) можно определить коэффициенты вязкости и теплопроводности ферми-жидкости.

Начнем с нахождения вязкости. Для этого представим себе, что в жидкости происходит движение с некоторой, слегка неоднородной по координатам скоростью  $u$ . Функция распределения в этом случае будет мало отличаться от равновесного значения

$$n = n_0 + \delta n, \quad (64.1)$$

где

$$n_0 = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_0 - p u - \mu}{T}} + 1}; \quad |\delta n| \ll n_0. \quad (64.2)$$

Величина  $\delta \varepsilon$  находится из кинетического уравнения (63.1). Как обычно, в левую часть кинетического уравне-

ния надо подставить функцию  $n_0$ . При этом мы будем считать, что в рассматриваемой точке жидкости  $u = 0$ . Подставляя (64.2) в уравнение (63.1), находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_0}{\partial t} - \frac{1}{3} \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} p \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \operatorname{div} u - \frac{1}{2} \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \times \\ \times \left( p_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} - \frac{1}{3} p_l \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_l} \delta_{ik} \right) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right) = I(n). \end{aligned} \quad (64.3)$$

Теперь преобразуем  $\partial n_0 / \partial t$  и покажем, что это выражение тоже не зависит от члена с  $f$  в формуле (59.5). Согласно формуле (64.2) мы можем написать

$$\delta n_0 = \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon_0} \left( \delta \varepsilon_0 - \delta \mu - \frac{\varepsilon_0 - \mu}{T} \delta T - p \delta u \right). \quad (64.4)$$

Так как производная  $\partial n_0 / \partial \varepsilon_0$  в (64.4) отлична от нуля в малой окрестности точки  $\varepsilon_0 = \mu$ , причем является быстро меняющейся функцией в этой области, то мы можем считать величины в скобке относящимися к этой точке (поправки будут иметь относительный порядок  $(T/\mu)^2$ ). При этом вариации  $\delta \varepsilon_0$  и  $\delta \mu$  являются произвольными и отнюдь не равны друг другу. С другой стороны, функция распределения нормирована при помощи соотношения

$$\int n_0 d\tau = N,$$

где  $N$  — число атомов в единице объема. Варьируя это соотношение, находим

$$\begin{aligned} \delta N = \int \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon_0} \left( \delta \varepsilon_0 - \delta \mu - \frac{\varepsilon_0 - \mu}{T} \delta T - p \delta u \right) d\tau \approx \\ \approx - \left[ (\delta \varepsilon_0 - \delta \mu - p \delta u) \frac{d\tau}{d\varepsilon_0} \right]_{\varepsilon_0 = \mu}, \end{aligned} \quad (64.5)$$

так как  $\int \left( \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon_0} \right) d\varepsilon_0 = -1$ . Сравнивая формулы (64.5) и (64.4), получаем

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} = - \frac{\partial N}{\partial t} \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \left( \frac{d\varepsilon_0}{d\tau} \right)_{\varepsilon_0 = \mu}.$$

Число атомов  $N$  удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\frac{\partial N}{\partial t} + N \operatorname{div} u = 0. \quad (64.6)$$

Таким образом, член с  $\partial n_0 / \partial t$  дает добавку к члену  $\operatorname{div} u$ , и в результате последний принимает вид

$$-\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \left( \frac{1}{3} p \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial p} - N \left( \frac{d\varepsilon_0}{d\tau} \right)_{\varepsilon=\varepsilon_0} \right) \operatorname{div} u. \quad (64.7)$$

Подставляя формулу (60.1) и воспользовавшись равенством числа возбуждений числу частиц, вследствие чего  $p_0 / \hbar = (3\pi^2 N)^{1/3}$ , обнаруживаем, что это выражение обращается в нуль. Таким образом, с точностью до малых поправок  $\sim (T/\mu)^2$  в левой части кинетического уравнения отсутствуют члены с  $\operatorname{div} u$ .

В правой части уравнения (63.1) стоит интеграл столкновений

$$I(n) = -\int w [n_1 n_2 (1 - n'_1) (1 - n'_2) - (1 - n_1) (1 - n_2) n'_1 n'_2] \times \\ \times \delta(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon'_1 - \varepsilon'_2) d\tau_2 d\tau'_1 dp'_2. \quad (64.8)$$

Здесь надо иметь в виду, что в  $\delta$ -функции от энергий подразумеваются истинные энергии, т. е. энергии, описываемые формулой (59.5). Благодаря этому при подстановке в интеграл столкновений функции  $n_0(\varepsilon_0)$  он не обратится в нуль. Интеграл обращается в нуль лишь при подстановке в него истинной равновесной функции, т. е.  $n_0(\varepsilon)$ . Полная функция распределения может быть написана как

$$n = n_0(\varepsilon) - \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \int f \delta n d\tau + \delta n. \quad (64.9)$$

Введем обозначение

$$\delta n = -\frac{n_0(1 - n_0)}{T} v = \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon_0} v. \quad (64.10)$$

Подставляя в формулу (64.9), находим, что добавка к равновесной функции распределения тоже имеет форму

(64.10). Однако вместо  $v$  в ней стоит величина

$$\psi = v + \left( \frac{d\tau}{d\varepsilon_0} \right)_\mu \int f(\chi) v \frac{d\Omega}{4\pi}. \quad (64.11)$$

Подстановка формулы (64.9) в интеграл столкновений, в пренебрежении членами, квадратичными по  $\psi$ , дает

$$I(n) = \frac{1}{T} \int w n_{01} n_{02} (1 - n'_{01}) (1 - n'_{02}) (\psi_1 + \psi_2 - \psi'_1 - \psi'_2) \times \\ \times \delta(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon'_1 - \varepsilon'_2) d\tau_2 d\tau'_1 dp'_2. \quad (64.12)$$

Вероятность столкновения  $w$  зависит, вообще говоря, от всех четырех импульсов. Однако для нас существенны импульсы, по абсолютной величине близкие к граничному значению на поверхности Ферми. Поэтому можно считать, что  $w$  зависит лишь от  $\theta$  — угла между  $p_1$  и  $p_2$ , и  $\varphi$  — угла, образованного плоскостями  $(p_1, p_2)$  и  $(p'_1, p'_2)$ .

Воспользуемся тем, что импульсы частиц в основной области интегрирования по абсолютной величине мало отличаются от граничного импульса  $p_0$ . Если повернуть плоскость векторов  $(p'_1, p'_2)$  относительно оси, направленной по  $p_1 + p_2$ , на угол  $\varphi$  так, чтобы эта плоскость совпала с плоскостью  $(p_1, p_2)$ , то мы получим диаграмму, изображенную на рис. 11. Ясно, что вектор  $f$  будет малым по абсолютной величине и углы между всеми импульсами и осью  $p_1 + p_2$  будут примерно равны  $\theta/2$  или  $-\theta/2$ . Таким образом, получаем

$$p'_1 \approx p_1 + f_z \cos \frac{\theta}{2} + f_r \sin \frac{\theta}{2}, \quad (64.13)$$

$$p'_2 \approx p_2 - f_z \cos \frac{\theta}{2} + f_r \sin \frac{\theta}{2},$$

где  $f_z$  — компонента  $f$  по оси  $p_1 + p_2$ , а  $f_r$  — перпендикулярная компонента. Интегрируя по  $dp'_2$ , мы ликвидируем  $\delta$ -функцию от импульсов, а интеграл по  $d\tau'_1$

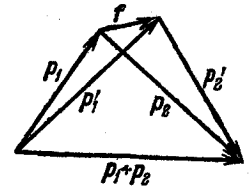


Рис. 11.

заменяем интегралом по  $df_r df_z d\varphi$ , введя цилиндрическую систему координат с осью по  $p_1 + p_2$ :

$$d\tau_1' = 2p_0 \sin \frac{\theta}{2} df_r df_z d\varphi \frac{1}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (64.14)$$

Теперь введем следующие обозначения:

$$x = \frac{\varepsilon_1' - \mu}{T}, \quad t = \frac{\varepsilon_1 - \mu}{T}, \quad \kappa = \frac{\mu}{T}, \quad y = \frac{\varepsilon_2' - \mu}{T}, \quad (64.15)$$

с учетом значений  $\varepsilon_i$  из (60.4). Переход от переменных  $f_r, f_z$  к  $x$  и  $y$  осуществляется очень легко при помощи формулы (64.13). При этом получаем:

$$d\tau_1' \int d\tau_2 \delta(\varepsilon) = \frac{m^{*3} T^2 dx dy \left( \frac{d\Omega}{2\pi} \right) \left( \frac{d\varphi_2}{2\pi} \right)}{8\pi^4 \hbar^3 \cos \left( \frac{\theta}{2} \right)}, \quad (64.16)$$

где через  $d\Omega$  мы обозначили дифференциал углов  $\sin \theta d\theta d\varphi$ , от которых зависит  $w(\theta, \varphi)$ . Отметим, что ввиду неразличимости частиц угол  $\varphi$  меняется лишь в пределах от нуля до  $\pi$ .

Из соображений симметрии ясно, что  $\psi$  должно иметь вид

$$\psi = \frac{1}{2} q(t) \left( p_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_k} - \frac{1}{3} p_l \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_l} \delta_{ik} \right) \times \\ \times \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \right). \quad (64.17)$$

При подстановке этого выражения в интеграл столкновений второй множитель может быть преобразован по теореме сложения сферических функций. После интегрирования по углу  $\varphi_2$  остаются только первые члены, т. е.

$$P_2(\theta_1 + \theta_2) \rightarrow P_2(\theta_1) P_2(\theta_2), \quad \text{где } P_2(\theta) = \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2}.$$

В результате из уравнения (64.3) находим следующее

уравнение для  $q$ :

$$n_0(t) [1 - n_0(t)] = \\ = \frac{m^{*3} T^2}{8\pi^4 \hbar^3 \cos \frac{\theta}{2}} \int \frac{d\Omega}{2\pi} \int_{-\kappa}^{\infty} dx \int_{x+y>t-\kappa}^{\infty} dy w(\theta, \varphi) \times \\ \times n_0(t) n_0(x+y-t) [1 - n_0(x)] [1 - n_0(y)] \cdot [q(t) + \\ + q(x+y-t) P_2(\theta) - q(x) P_2(\theta') - q(y) P_2(\theta_2)]. \quad (64.18)$$

Ввиду того что в рассматриваемой нами области температур существенны лишь значения  $x, y$ , и  $t$ , много меньшие  $\kappa$ , мы можем считать нижний предел интегрирования в формуле (64.18) равным  $-\infty$ . В этих условиях, предполагая, что  $q$  — симметричная функция (это подтверждается результатом), легко убеждаемся, что все члены с различными  $q$  могут быть приведены к одинаковому виду в смысле зависимости от  $x$  и  $y$ . Таким образом, скобка запишется просто в виде

$$q(t) + q(x) [P_2(\theta) - P_2(\theta'_1) - P_2(\theta'_2)].$$

приход от углов  $\theta'_1$  и  $\theta'_2$  к углам  $\theta$  и  $\varphi$  легко получается Пер помощи рис. 11. Интегрируя по переменной  $y$ , от которой  $q$  теперь не зависит, после некоторых преобразований находим следующее уравнение:

$$\frac{8\pi^4 \hbar^3}{m^{*3} T^2} = \frac{w(\theta, \varphi)}{\cos \frac{\theta}{2}} \left[ \frac{3}{4} (1 - \cos \theta)^2 \sin^2 \varphi - 1 \right] \times \\ \times \left\{ \int_0^{\infty} \frac{dx x [q(x+t) + q(x-t)]}{e^x - 1} + 2 \int_0^{\infty} \frac{dx x q(x)}{e^x + 1} + \right. \\ \left. + \int_0^t dx x q(x-t) \right\} + \frac{w(\theta, \varphi)}{\cos \frac{\theta}{2}} q(t) \frac{\pi^2 + t^2}{2}, \quad (64.19)$$

где черта означает усреднение по телесному углу.

Полученное уравнение сложно, однако анализ показывает, что при любых предположениях о виде  $w(\theta, \varphi)$

ошибка в коэффициенте вязкости будет невелика, если просто считать, что нужные нам значения  $t^2 \ll \pi^2$ . При этом  $q$  оказывается константой, равной

$$q = \frac{64\pi^2 \hbar^6}{3m^{*3} T^2} \left[ \frac{w(\theta, \varphi)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} (1 - \cos \theta)^2 \sin^2 \varphi \right]^{-1}. \quad (64.20)$$

Поток импульса выражается формулой (63.3). Подставляя в нее  $n = n_0 + \delta n$  и формулу (64.10) и учитывая, что энергия также является функционалом от функции распределения, получаем:

$$\begin{aligned} \Pi_{ik} &= \int p_i \frac{\partial \varepsilon(p)}{\partial p_k} \left[ \delta n - \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon_0} \int f(p, p') \delta n' \delta \tau' \right] d\tau = \\ &= \int p_i \frac{\partial \varepsilon(p)}{\partial p_k} \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon_0} \left[ v + \int f v \left( \frac{d\tau'}{d\varepsilon_0} \right)_{\varepsilon'_0 = \mu} \frac{d\Omega'}{4\pi} \right] d\tau = \\ &= \int p_i \frac{\partial \varepsilon(p)}{\partial p_k} \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon_0} \psi d\tau. \end{aligned} \quad (64.21)$$

Таким образом, видно, что в выражение для потока импульса вошла та же функция  $\psi$ , что и в кинетическое уравнение. Следовательно, функция  $f$  не вошла в выражение для потока импульса, и оно имеет такой же вид, как и у ферми-газа из частиц с массой  $m^*$  и законом рассеяния, описываемым функцией  $w(\theta, \varphi)$ .

Подставляя в (64.21) формулы (64.17) и (64.20) и определяя коэффициент вязкости как коэффициент пропорциональности между  $\Pi_{ik}$  и  $-\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{ik}\right)$ ,

находим

$$\eta = \frac{64}{45} T^{-2} \frac{\hbar^3 p_0^5}{m^{*4}} \left[ \frac{w(\theta, \varphi)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} (1 - \cos \theta)^2 \sin^2 \varphi \right]^{-1}. \quad (64.22)$$

Уравнение (64.19) может быть сведено к интегральному уравнению для функции  $Q(t) = q(t) \operatorname{sech} \frac{1}{2} t$ , которое допускает точное решение [38]. Довольно длинные вычисления в этом случае приводят к появлению в формуле

(64.20) дополнительного множителя

$$C(\lambda) = \frac{1-\lambda}{4} \sum \frac{4n+3}{(n+1)(2n+1)[(n+1)(2n+1)-\lambda]}, \quad (64.23)$$

в котором параметр  $\lambda$  определен следующим образом:

$$\lambda \frac{w(\theta, \varphi)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{w(\theta, \varphi)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left[ 1 - \frac{1}{4} (1 - \cos \theta)^2 \sin^2 \varphi \right]. \quad (64.24)$$

Можно показать, что величина коэффициента  $C(\lambda)$  заключена в пределах

$$0,75 < C(\lambda) < 0,925. \quad (64.25)$$

Таким образом, точное решение уравнения (64.19) подтверждает справедливость сделанного выше приближения.

Вязкость оказывается пропорциональной  $T^{-2}$ . Эта зависимость была предсказана Померанчуком на основании качественных соображений. Что касается численных значений вязкости, то они зависят от определенным образом усредненной функции  $w(\theta, \varphi)$ , и потому не могут быть точно установлены. Но формула (64.22) дает возможность определить порядок величины  $\eta$ . Для этого воспользуемся тем, что, как будет показано в § 70, функция  $f$  имеет порядок амплитуды рассеяния квазичастиц. Следовательно,  $w \sim \frac{2\pi}{\hbar} f^2$ , а величина  $f$  может быть определена из экспериментальных данных о скорости звука (см. § 66). Для  $\text{He}^3$  с учетом численных значений  $m^*$  и  $p_0$  (61.4) получаем

$$\eta = \frac{\alpha}{T^2} (\alpha \sim 10^{-6} \text{ пуаз}; T - \text{в } ^\circ\text{K}).$$

Такая величина соответствует экспериментальным результатам.

Как уже было отмечено в начале этого параграфа, в левой части кинетического уравнения с точностью до членов порядка  $(T/\mu)^2$  отсутствует часть, пропорциональная  $\operatorname{div} u$ . Это означает, что коэффициент второй вязкости в  $(T/\mu)^2$  раз меньше  $\eta$  и не играет роли в физических эффектах (например, в поглощении звука).

### § 65. Теплопроводность

Теперь перейдем к вычислению теплопроводности [37, 38]. Предполагая небольшой градиент температуры, получаем в левой части кинетического уравнения

$$-\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon_0} \left( \frac{\varepsilon_0 - \mu}{T} - s \right) \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \mathbf{p}} \nabla T, \quad (65.1)$$

где  $s$  — энтропия на одну частицу.

Преобразования интеграла столкновений вначале не отличаются от проделанных в предыдущем параграфе (формулы (64.8) — (64.16)). Функцию  $\psi$  в этом случае рационально искать в виде

$$\psi = q(t) \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \mathbf{p}} \nabla T. \quad (65.2)$$

Вместо уравнения (64.18) при этом получается такое же уравнение, но с  $\cos \theta$  вместо  $P_2(\theta)$  в интеграле столкновений и множителем  $[(\varepsilon_0 - \mu)/T] - s$  в левой части. Наличие такого множителя показывает, что искомая функция должна содержать как симметричную, так и антисимметричную по  $t$  части, а именно:

$$q(t) = q_s(t) + q_a(t). \quad (65.3)$$

Подстановка в интеграл столкновений дает два уравнения

$$\frac{8\pi^4 \hbar^3 s}{m^{*3} T^2} = \frac{\overline{w(\theta, \Phi)}}{\cos \frac{\theta}{2}} \left[ q_s(t) \frac{\pi^2 + t^2}{2} - \int_0^\infty dx \frac{x [q_s(x+t) + q_s(x-t)]}{e^x - 1} - 2 \int_0^\infty \frac{dx \cdot x q_s(x)}{e^x + 1} - \int_0^t dx \cdot x q_s(x-t) \right], \quad (65.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{8\pi^4 \hbar^3}{m^{*3} T^2} &= \frac{\overline{w(\theta, \Phi)} (1 + 2 \cos \theta)}{\cos \frac{\theta}{2}} \left[ \int_0^\infty dx \frac{x [q_a(x-t) - q_a(x+t)]}{e^x - 1} + \right. \\ &+ 2t \int_0^\infty \frac{dx q_a(x)}{e^x + 1} + \left. \int_0^1 dx \cdot x q_a(x-t) \right] + \frac{\overline{w(\theta, \Phi)}}{\cos \frac{\theta}{2}} q_a(t) \frac{\pi^2 + t^2}{2}. \end{aligned} \quad (65.5)$$

Однако в данном случае кинетическое уравнение не определяет полностью решения задачи. К нему должно быть добавлено дополнительное условие, выражающее сохранение потока вещества. Это означает

$$\begin{aligned} \delta \int n \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} d\tau &= \int \delta n \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \mathbf{p}} d\tau + \int n_0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left[ \int f \delta n' d\tau' \right] d\tau = \\ &= \int \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \mathbf{p}} \left[ \delta n - \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon_0} \int f \delta n' d\tau' \right] d\tau = 0. \end{aligned} \quad (65.6)$$

Здесь мы произвели интегрирование по частям и в интегралах, уже содержащих  $\delta n$ , заменили  $\varepsilon$  на  $\varepsilon_0$ . Подставляя в (65.6) выражения (64.10), (64.11) и (65.2), получаем

$$\int \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon_0} \left( \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \mathbf{p}} \right)^2 q(t) d\tau = 0. \quad (65.7)$$

В результате длинных, но несложных преобразований удается уравнения (65.4) и (65.5) привести к следующему простому виду:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx K(t, x) [q_s(t) - q_s(x)] = -As, \quad (65.8)$$

$$\frac{1}{2} (\pi^2 + t^2) q_a - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} dx K(t, x) q_a(x) = At, \quad (65.9)$$

где ядро интегрального уравнения  $K(t, x)$  и параметры  $\lambda$  и  $A$  равны

$$K(t, x) = \frac{(e^{-t} + 1)(x - t)}{(e^{-x} + 1)(e^{x-t} - 1)}, \quad (65.10)$$

$$\lambda \frac{\overline{w(\theta, \Phi)}}{\cos \frac{\theta}{2}} = \frac{\overline{w(\theta, \Phi)}}{\cos \frac{\theta}{2}} (1 + 2 \cos \theta), \quad (65.11)$$

$$A = \frac{8\pi^4 \hbar^3}{m^{*3} T^2} \left[ \frac{\overline{w(\theta, \Phi)}}{\cos \frac{\theta}{2}} \right]^{-1}. \quad (65.12)$$

Умножим левую и правую части уравнений (65.8) на  $dn_0/dt$  и проинтегрируем по  $t$  в пределах от  $-\infty$  до  $\infty$ . Так как



функция  $q_s(t) - q_s(x)$  антисимметрична относительно замены  $x$  на  $t$ , а произведение  $K(x, t) dn_0/dt$  — симметричная функция относительно той же замены, то интеграл от левой части (65.8) равен нулю. Правая же часть стремится к нулю, поскольку если  $T \rightarrow 0$ , то  $s \sim T \rightarrow 0$ . Поэтому правую часть в уравнении (65.8) можно с самого начала положить равной нулю. Введем теперь функцию

$$Q(t) = q(t) \operatorname{sech} \frac{1}{2} t. \quad (65.13)$$

Тогда уравнение (65.8) сводится к виду

$$\frac{1}{2} (\pi^2 + t^2) Q_s(t) - \int_{-\infty}^{\infty} dx g(t-x) Q_s(x) = 0, \quad (65.14)$$

а уравнение (65.9) — к виду

$$\frac{1}{2} (\pi^2 + t^2) Q_a(t) - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} dx g(t-x) Q_a(x) = At \operatorname{sech} \frac{1}{2} t, \quad (65.15)$$

где

$$g(t-x) = \frac{1}{2} (t-x) \operatorname{sech} \frac{1}{2} (t-x). \quad (65.16)$$

Далее применяем метод Фурье, и из уравнений (65.14) и (65.15) получаем два дифференциальных уравнения для фурье-компонент функций  $Q_s$  и  $Q_a$

$$\frac{d^2 \Phi_s}{dk^2} + \pi^2 \{2 \operatorname{sech}^2(\pi k) - 1\} \Phi_s = 0, \quad (65.17)$$

$$\frac{d^2 \Phi_a}{dk^2} + \pi^2 \{2\lambda \operatorname{sech}^2(\pi k) - 1\} \Phi_a = -4\pi^2 i A \operatorname{sh}(\pi k) \operatorname{sech}^2(\pi k). \quad (65.18)$$

Это уравнения — типа уравнения Шредингера с потенциалом, для которого известно точное решение [39]. Решив эти уравнения, можно затем найти и функцию  $q(t)$ .

Опишем кратко приближенный способ нахождения функции  $q(t)$ . Для нахождения  $q_a(t)$  нам достаточно решить уравнение (65.5) наподобие того, как делалось при рассмотрении вязкости. Что же касается четной части  $q_s(t)$ , то тут дело обстоит иначе. Во-первых, мы можем заметить, что  $q_s = \operatorname{const}$  обращает тожде-

ственно в нуль правую часть уравнения (65.4). Поэтому постоянный член  $q_s(0)$  надо определить не из этого уравнения, а из условия (65.7). При этом легко показать, что дальнейшие члены в  $q_s(t)$ , а именно  $a_2 t^2 + a_4 t^4 + \dots$  вообще не внесут вклада в теплопроводность. Действительно, появление такого члена, например,  $a_m t^{2m}$ , должно изменить постоянный член в  $q_s(t)$  на величину  $a_m^0$ , такую, что

$$\int \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon_0} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right)^2 [a_m t^{2m} + a_m^0] d\tau = 0.$$

Из этого условия получается

$$a_m^0 = -a_m (2m)! R_m; \quad R_m = \int_0^{\infty} \frac{z^{2m-1}}{e^z + 1} dz.$$

Для нахождения потока энергии нам придется вычислять интегралы типа

$$\int \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon_0} F(\varepsilon_0) (a_m t^{2m} + a_m^0) d\tau = \left( F \frac{d\tau}{d\varepsilon_0} \right)_{\varepsilon_0=\mu} [a_m (2m)! R_m + a_m^0] = 0.$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что для нахождения коэффициента теплопроводности нужно решить лишь уравнение (65.5) и затем так подобрать постоянный член, чтобы удовлетворить условию (65.7). Практически, как и в случае вязкости, достаточно найти решение в предположении  $t^2 \ll \pi^2$ . При этом мы получаем

$$q = \frac{24\pi^2 \hbar^6}{m^3 T^2} \left( t - \frac{\pi^2 T m^*}{p_0^2} \right) \left[ \frac{w(\theta, \varphi) (1 - \cos \theta)}{\cos \frac{\theta}{2}} \right]^{-1}.$$

Вычисление  $\kappa$  с помощью так полученного приближенного выражения для  $q(t)$  дает результат, отличающийся от точного решения множителем  $H(\lambda)$  порядка единицы (см. ниже (65.24) и (65.25)).

Интересующий нас поток энергии дается формулой (63.5). Подставив (64.1) в эту формулу, получаем

$$Q = \int \varepsilon_0(p) \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial p} \delta n d\tau - \int \varepsilon_0(p) \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial p} \frac{\partial n}{\partial \varepsilon_0} \int \delta n' d\tau' d\tau. \quad (65.19)$$

Отсюда для коэффициента теплопроводности  $\kappa$  с помощью (64.9), (64.11) и (65.2) находим следующее выражение:

$$\kappa = -\frac{kT}{3} \int dt \left( \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial p} \right)^2 \frac{\partial \tau}{\partial \varepsilon} \frac{\partial n_0}{\partial t} t q(t). \quad (65.20)$$

Согласно (65.7)  $q_s \sim T q_a$ , тогда из (65.20) следует, что вклад  $q_s$  в  $\kappa$  будет в  $(T/\mu)^2$  раз меньше, чем вклад  $q_a$ .

Поэтому достаточно найти антисимметричную часть функции  $q(t)$ . Для нахождения  $\Phi_a$  (уравнение (65.18)) вначале решаем соответствующее однородное уравнение. Собственные значения этого уравнения и собственные функции равны

$$\lambda_n = (n+1)(2n+3), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (65.21)$$

$$\Phi_{na} = \text{sh}(\pi k) \text{sech}^2(\pi k) F\left(-n, n + \frac{5}{2}; \text{sech}^2(\pi k)\right), \quad (65.22)$$

где  $F$  — гипергеометрическая функция. Далее разлагаем решение неоднородного уравнения (65.18) в ряд по собственным функциям (65.22) и находим

$$\Phi_a = iA \sum \frac{(4n+5)}{(n+1)(2n+3) - \lambda} \Phi_{na}(k). \quad (65.23)$$

Теперь производим окончательное вычисление  $\kappa$ , согласно (65.20) и (65.23) имеем

$$\begin{aligned} \kappa &= -\frac{kT}{3} \left[ \left( \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial p} \right)^2 \frac{\partial \tau}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon=\mu} \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{dn_0}{dt} t q_a(t) = \\ &= -\frac{kT}{3} \left[ \left( \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial p} \right)^2 \frac{\partial \tau}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon=\mu} \frac{i\pi}{4} \int_{-\infty}^{\infty} dk \text{sh}(\pi k) \text{sech}^2(\pi k) \Phi_a(k) = \\ &= \frac{8}{3} \frac{\pi^2 \hbar^3 p_0^3}{m^* 4T} \left\{ \frac{w(\theta, \varphi)}{\cos \frac{\theta}{2}} (1 - \cos \theta) \right\}^{-1} H(\lambda), \end{aligned} \quad (65.24)$$

где  $H(\lambda)$  определяется следующим рядом:

$$H(\lambda) = \frac{3-\lambda}{4} \sum \frac{4n+5}{(n+1)(2n+3)[(n+1)(2n+3) - \lambda]}. \quad (65.25)$$

Оценка показывает, что величина  $H(\lambda)$  заключена в пределах  $0,417 < H(\lambda) < 0,561$ . Заметим, что как и в случае вязкости выражение для коэффициента  $\kappa$  не содержит функцию  $f$ .

Температурная зависимость коэффициента теплопроводности выражается законом  $T^{-1}$ , что также совпадает с качественным предсказанием Померанчука.

Оценивая численное значение  $\kappa$  для  $\text{He}^3$  аналогично тому, как это мы делали для вязкости, приходим к со-

отношению

$$\kappa = \frac{\beta}{T} \left( \beta \sim 10^2 \frac{\text{эрг}}{\text{см} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}}; T - \text{в } ^\circ\text{K} \right). \quad (65.26)$$

Полученные выражения для коэффициентов вязкости и теплопроводности во всяком случае перестают быть справедливыми в области температур  $T \sim \mu$ . Однако, помимо этого, существует ограничение, которое отодвигает область применимости теории в сторону значительно более низких температур. Оно заключается в том, что интересный нас интервал энергий возбуждений порядка  $T$  должен быть значительно больше квантовой неопределенности в энергии, происходящей благодаря столкновениям, т. е.

$$\tau \gg \frac{\hbar}{T}, \quad (65.27)$$

где  $\tau$  — время между столкновениями. Отметим, что выполнение условия (65.27) требуется не только для вычисления кинетических коэффициентов так, как это делалось выше, но и для справедливости всей теории ферми-жидкости. Для  $\text{He}^3$  величина  $\tau$  может быть определена из экспериментальных значений вязкости (см. формулу (67.12)). Если ими пользоваться, то из формулы (65.27) получается

$$T \ll 0,3^\circ \text{K}.$$

## § 66. Звук [40, 41]

Распространение звука в ферми-жидкости имеет ряд совершенно специфических особенностей. Если рассмотреть звук заданной частоты, то при не слишком низких температурах его распространение происходит по законам обычной гидродинамики. Затухание звука будет при этом пропорционально  $\tau$ . При понижении температуры время столкновений будет увеличиваться пропорционально  $T^{-2}$  и, наконец, при таких температурах, когда  $\omega \tau \sim 1$ , звук вообще перестанет распространяться. Однако оказывается, что при дальнейшем понижении температуры опять появляется возможность распространения звука. При этом скорость его будет иной, и он уже не будет представлять собой просто волну сжатия и разрежения. Это явление предсказано Л. Д. Ландау и было названо им «нулевым

звуком». Ввиду того что в определении природы звука существенно лишь соотношение между  $\omega$  и  $\tau$ , эти два звука могут быть описаны как низкочастотный звук, ( $\omega\tau \ll 1$ ) и высокочастотный звук ( $\omega\tau \gg 1$ ).

Скорость звука при малых частотах или не слишком низких температурах, когда соблюдается условие  $\omega\tau \ll 1$ , определяется обычным образом через сжимаемость. Покажем, что она существенным образом зависит от функции  $f$ .

Сжимаемость удобно выразить через производную  $\partial\mu/\partial N$ . Здесь  $N$  — полное количество частиц. Пользуясь тем, что химический потенциал  $\mu$  зависит лишь от  $N/V$ , находим

$$\frac{\partial\mu}{\partial N} = -\frac{V}{N} \frac{\partial\mu}{\partial V} = -\frac{V^2}{N^2} \frac{\partial p}{\partial V}. \quad (66.1)$$

Скорость звука, как известно, определяется соотношением

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{\partial p}{\partial \left(\frac{mN}{V}\right)} = \frac{1}{m} \left(N \frac{\partial\mu}{\partial N}\right). \quad (66.2)$$

Производная  $\partial\mu/\partial N$  вычисляется следующим образом. Ввиду того, что  $\mu = \epsilon(p_0)$ , изменение  $\mu$  происходит как вследствие изменения  $p_0$ , так и вследствие изменения вида функции  $\epsilon(p)$ :

$$\delta\mu = \int f \delta n' d\tau' + \frac{\partial\epsilon_0}{\partial p_0} \delta p_0. \quad (66.3)$$

Изменения  $\delta N$  и  $\delta p$  связаны соотношением

$$\delta N = 8\pi p_0^2 \delta p_0 \frac{V}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (66.4)$$

Так как в интеграле формулы (66.3) существенны лишь изменения  $\delta n$  вблизи ферми-границы, то интегрирование по абсолютной величине импульса можно произвести. Это дает

$$\int f \delta n' d\tau' = \frac{\delta N}{4\pi V} \int f d\Omega. \quad (66.5)$$

Подстановка в (66.3) дает (см. также (60.1) и (60.2)):

$$\frac{\partial\mu}{\partial N} = \frac{1}{4\pi V} \int f d\Omega + \frac{(2\pi\hbar)^3}{8\pi p_0 m^* V}. \quad (66.6)$$

Формула (60.5) позволяет выразить здесь эффективную массу  $m^*$  через истинную массу атомов  $m$ . Подставляя полученное выражение в формулу (66.2) и пользуясь тем, что

$$N = \frac{8\pi p_0^3 V}{3(2\pi\hbar)^3},$$

находим

$$c^2 = \frac{p_0^2}{3m^2} + \frac{2}{3m} \left(\frac{p_0}{2\pi\hbar}\right)^3 \int f(\chi) (1 - \cos \chi) d\Omega. \quad (66.7)$$

Формулы (66.5) и (66.7) дают возможность получить некоторые сведения о функции  $f(\chi)$ . Если ввести обозначение

$$F(\chi) = f(\chi) \left(\frac{d\tau}{d\epsilon}\right)_{\epsilon=\mu} = f(\chi) \frac{p_0 m^*}{\pi^2 \hbar^3} = \sum_k F_k P_k(\cos \chi), \quad (66.8)$$

то первые коэффициенты разложения по полиномам Лежандра могут быть определены из формул (60.5) и (66.7). Действительно, нетрудно получить соотношения

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m^*} (1 + \overline{F \cos \chi}), \quad c^2 = \left(\frac{p_0^2}{3m^2}\right) \frac{1 + \overline{F}}{1 + \overline{F \cos \chi}}. \quad (66.9)$$

Подставляя значения параметров для  $\text{He}^3$  из формулы (61.4) и величину скорости звука  $c_{T=0} = 187 \text{ м/сек}$ , находим

$$F_0 = \overline{F} = 10,77, \quad F_1 = \overline{3F \cos \chi} = 6,25. \quad (66.10)$$

Ввиду того что следующие коэффициенты не могут быть определены таким простым способом, мы в дальнейшем будем в конкретных случаях ограничиваться первыми двумя гармониками функции  $F$ :

$$F = F_0 + F_1 \cos \chi. \quad (66.11)$$

Перейдем теперь к исследованию «нулевого звука», т. е. случая, когда  $\omega\tau \gg 1$ . Кинетическое уравнение имеет вид (63.4). Подставим в него функцию распределения в виде

$$n = n_0 + \delta n, \quad (66.12)$$

где малое отклонение  $\delta n$  является периодической функцией координат и времени:  $\delta n \sim e^{i(kr - \omega t)}$ . При этом, конечно, надо учесть, что согласно (59.5) энергия возбуж-

дений тоже претерпевает изменение. Вследствие того что интеграл столкновений  $I(n) \sim \delta n / \tau$ , а  $\omega \tau \gg 1$ , мы можем пренебречь  $I(n)$ .

Таким образом, находим

$$(kv - \omega) \delta n - kv \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} \int f \delta n' \delta \tau' = 0.$$

Из вида этого уравнения следует, что  $\delta n$  пропорционально  $\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}$ . Обозначим  $\delta n = \frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon} v$ , получаем

$$(kv - \omega) v + kv \int F v' \frac{d\Omega'}{4\pi} = 0. \quad (66.13)$$

Если выбрать  $k$  в качестве полярной оси и ввести обозначения:  $u = \omega/k$  — скорость распространения волны,  $s = u/v$ , то уравнение (66.13) приобретает вид

$$(s - \cos \theta) v(\theta, \varphi) = \cos \theta \int F(\chi) v(\theta', \varphi') \frac{d\Omega}{4\pi}. \quad (66.14)$$

Отсюда можно определить  $v(\theta, \varphi)$  и собственное значение  $s$ . Ввиду того что изменение функции распределения  $\delta n$  пропорционально  $\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon}$ , ясно, что дело сводится к искажению ферми-поверхности. Вид этого искажения определяется функцией  $v$ . Уравнение (66.14) существенно зависит от функции  $F$ .

Рассмотрим сначала для примера наиболее простой случай, а именно  $F = F_0 = \text{const}$ . При этом из уравнения (66.14) получаем (без экспоненциального периодического множителя)

$$v = \frac{\text{const} \cos \theta}{s - \cos \theta}. \quad (66.15)$$

Смещению ферми-поверхности как целого (это соответствует обычному звуку) соответствовало бы  $v \sim \cos \theta$ . Таким образом, в данном случае мы имеем дело с анизотропным искажением поверхности Ферми. Как мы увидим ниже,  $s$  должно быть больше единицы. Таким образом, поверхность Ферми оказывается вытянутой в направлении движения.

Подставляя (66.15) в (66.14) с  $F = F_0$ , находим уравнение для  $s$ . Произведя элементарное интегрирование, находим

$$\frac{s}{2} \ln \frac{s+1}{s-1} - 1 = \frac{1}{F_0}. \quad (66.16)$$

Отсюда видно, что если  $s$  действительно (это соответствует незатухающим волнам), то оно должно быть больше 1, т.е.

$$u > v. \quad (66.17)$$

Из уравнения (66.14) видно, что это условие остается справедливым для любой функции  $F$ . Далее, ввиду того что левая часть уравнения (66.16) всегда положительна, ясно, что условием существования нулевого звука является  $F_0 > 0$ .

Если функция  $F_0$  велика, то  $s$  тоже велико. Из уравнения (66.16) получаем  $s \rightarrow \sqrt{\frac{F_0}{3}}$  при  $F_0 \rightarrow \infty$ . Наоборот, при  $F_0 \rightarrow 0$ ,  $s \rightarrow 1$ , т.е.  $u \rightarrow v$ . Это случай почти свободного ферми-газа.

Рассмотрим теперь общий случай  $F(\chi)$ . Представим эту функцию в виде суммы сферических гармоник согласно формуле (66.8). Подставим (66.8) в уравнение (66.14) и воспользуемся теоремой сложения полиномов Лежандра

$$P_n(\chi) = \sum_{m=-n}^n P_n^m(\theta) P_n^m(\theta') e^{im(\varphi-\varphi')} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!},$$

где  $P_n^m = P_n^{-m}$  — присоединенные полиномы Лежандра. После указанной выше подстановки получаем

$$(\cos \theta - s) v + \cos \theta \sum \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} P_n^m(\theta) F_n e^{im\varphi} \times \\ \times \int P_n^m(\theta') v(\theta', \varphi') e^{-im\varphi'} \frac{d\Omega'}{4\pi} = 0. \quad (66.18)$$

Вводим обозначения

$$F_n \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \int P_n^m(\theta') v(\theta', \varphi') e^{-im\varphi'} \frac{d\Omega'}{4\pi} = \Phi_{nm} \quad (66.19)$$

и решаем уравнение (66.19) относительно

$$v = - \frac{\cos \theta}{\cos \theta - s} \sum \Phi_{nm} P_n^m(\theta) e^{im\varphi}. \quad (66.20)$$

Подставив это выражение в соотношение (66.19) и производя интегрирование по  $\varphi$ , получим

$$F_n \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \int_k P_n^m(\theta') \frac{\cos \theta'}{\cos \theta' - s} P_k^m(\theta') \frac{d\Omega'}{4\pi} \Phi_{km} = \\ = \sum_k \Phi_{km} \delta_{kn}. \quad (66.21)$$

Таким образом, мы получили систему однородных уравнений, определяющих величины  $\Phi_{km}$ . Эта система разделяется на независимые подсистемы, соответствующие различным  $m$ . Из формулы (66.21) следует, что в ферми-жидкости при абсолютном нуле могут распространяться колебания нескольких различных типов, характеризующихся различной зависимостью амплитуды от углов  $\theta, \varphi$ . Значению  $m = 0$  соответствуют колебания, при которых  $v$  изотропно в плоскости, перпендикулярной  $k$ . При  $m \neq 0$  колебания поляризованы определенным образом в этой плоскости. Число типов колебаний определяется числом возможных значений  $m$  ( $|m| \leq n$ ). Скорости распространения колебаний определяются из условий равенства нулю детерминантов соответствующих систем:

$$\|\delta_{kn} + F_n \Omega_{kn}^m(s)\| = 0 \quad (n, k \geq |m|), \quad (66.22)$$

$$\Omega_{kn}^m(s) = \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!} \int P_k^m(\theta') \frac{\cos \theta'}{\cos \theta' - s} P_n^m(\theta') \frac{d\Omega'}{4\pi}.$$

Ввиду того что  $P_n^{-m} = P_n^m$ , коэффициенты  $\Omega_{kn}^m$  не зависят от знака  $m$ , так что колебания, отличающиеся знаком  $m$ , распространяются с одинаковой скоростью.

Из формулы (66.22) видно, что уравнения для скоростей являются трансцендентными. В общем случае они не всегда имеют вещественные корни. Однако возможны и такие случаи, когда вещественных корней имеется несколько. Это соответствует нескольким типам колебаний с

одинаковой поляризацией в плоскости, перпендикулярной  $k$ .

Для примера рассмотрим случай, когда функция  $F(x)$  содержит лишь нулевую и первую гармоники (функция (66.11)). При этом коэффициенты  $\Omega_{kn}^m$  равны

$$\Omega_{00}^0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{x dx}{x-s} = 1 - \frac{s}{2} \ln \frac{s+1}{s-1} = -w,$$

$$\Omega_{10}^0 = \Omega_{01}^0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{x^2 dx}{x-s} = -sw,$$

$$\Omega_{11}^0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{x^2 dx}{x-s} = \frac{1}{3} - s^2 w,$$

$$\Omega_{11}^1 = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \frac{(1-x^2) dx}{x-s} = \frac{1}{2} \left[ (s^2 - 1)w - \frac{1}{3} \right].$$

Для скорости распространения колебаний типа  $m = 0$  получим после подстановки в определитель (66.22) уравнение

$$w = \frac{1 + F_1/3}{F_0 + F_0 F_1/3 + F_1 s^2}. \quad (66.23)$$

Для случая  $m = 1$  получаем уравнение

$$w = \frac{F_1 - 6}{3F_1(s^2 - 1)}. \quad (66.24)$$

Это уравнение имеет один вещественный корень при  $F_1 > 6$ .

Остановимся теперь на применении полученных формул к случаю жидкого  $\text{He}^3$ . Из формулы (66.10) следует, что колебания типа  $m = 0$  соответствует одна скорость (корень уравнения (66.23))

$$s = u/v = 3,60, \quad u = 194 \text{ м/сек.}$$

Колебания типа  $m = 1$ , поскольку  $F_1 > 6$ , также могут распространяться в  $\text{He}^3$ .

Наряду с рассмотренными колебаниями в ферми-жидкости при абсолютном нуле могут распространяться волны существенно иного типа, которые можно назвать спиновыми. Для рассмотрения таких колебаний необходимо учесть спиновую часть функции  $f$ , которая определяется формулой (62.3). Введем новое обозначение

$$\Phi(\chi) = f(\chi) \left( \frac{d\tau}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=\mu} = F(\chi) + Z(\chi) \sigma \sigma'. \quad (66.25)$$

Уравнение нулевого звука теперь принимает вид

$$(s - \cos \theta) v = \cos \theta \cdot \frac{1}{2} S p_{\sigma'} \frac{1}{4\pi} \int \Phi v' d\Omega'. \quad (66.26)$$

Если считать  $v$  не зависящим от спина, то оно переходит в (66.14). Однако можно предполагать также другой вид функций  $v$ , а именно считать

$$v = v\sigma. \quad (66.27)$$

Для этой функции получаем уравнение

$$(s - \cos \theta) v = \cos \theta \int Z v' \frac{d\Omega'}{16\pi}. \quad (66.28)$$

Таким образом, для компонент вектора  $v$  получается уравнение, отличающееся от (66.14) лишь заменой  $F$  на  $Z/4$ . Поэтому все дальнейшие выкладки должны совпадать с тем, что было сделано выше.

Согласно тому, что было получено в § 62,  $Z_0$  в случае  $\text{He}^3$  оказывается равным примерно  $-2,7$ , т. е. отрицательно. Поэтому в  $\text{He}^3$  не могут распространяться спиновые волны.

Возможность распространения звуковых волн при  $T = 0$  означает, что ферми-жидкость обладает бозевской ветвью энергетического спектра в виде фононов с энергией  $\varepsilon = \mu p$ . Однако поправки в термодинамических величинах от этой ветви содержат более высокие степени  $T$ , не учитываемые в рассматриваемом приближении теории.

## § 67. Дисперсия и поглощение звука

В предыдущем параграфе были рассмотрены два предельных случая  $\omega t \ll 1$  и  $\omega t \gg 1$ . Рассмотрим теперь, как будет происходить переход от обычного звука к нулевому, т. е. дисперсию звука [41]. Ввиду того что область дисперсии  $\omega t \sim 1$  является в то же время областью сильного поглощения, наше рассмотрение дает возможность одновременно решить вопрос и о поглощении звука.

В данном случае нам необходимо найти решение кинетического уравнения, включающего интеграл столкновений. Однако ввиду того что закон взаимодействия возбуждений все равно неизвестен, мы упростим вид интеграла столкновений.

Для этой цели можно было бы ввести некоторое эффективное время  $\tau$  и заменить интеграл столкновений  $I$  в (63.1) выражением  $-\delta n/\tau$ . Однако при такой замене из кинетического уравнения не будут следовать законы сохранения для числа возбуждений, импульса и энергии, что делает невозможным переход к гидродинамике. Так как вторая вязкость, а также влияние теплопроводности (см. ниже) в нашем случае ничтожно малы, то в интеграле столкновений отсутствуют члены, содержащие нулевую и первую шаровые гармоники. Мы поэтому заменим интегралы столкновений следующим выражением \*)

$$I(n) \rightarrow \tau^{-1}(\delta n - \overline{\delta n} - \overline{3\delta n \cos \theta \cos \theta}). \quad (67.1)$$

Легко видеть, что при интегрировании по  $d\tau_p$  это выражение обращается в нуль. Оно также обращается в нуль после умножения на  $\varepsilon$  или на  $p \cos \theta$  и интегрирования по  $d\tau_p$  \*\*). Таким образом, уравнения сохранения числа частиц, импульса и энергии автоматически будут выполняться. Итак, согласно (66.14), (67.1) исходное

\*) Здесь и ниже чертой обозначается усреднение по углам.

\*\*) При этом интегрировании существенна лишь область значений импульсов, близких к  $p_0$ , поскольку функция  $\delta n$  содержит  $\delta$ -функцию при  $\varepsilon = \mu$ .

кинетическое уравнение имеет следующий вид:

$$(kv \cos \theta - \omega) v + kv \cos \theta \int F v' \frac{d\Omega'}{4\pi} = \\ = -\frac{1}{i\tau} (v - \bar{v} - \overline{3v \cos \theta} \cdot \cos \theta). \quad (67.2)$$

Имея в виду применение полученных результатов к  $\text{He}^3$ , мы, чтобы не усложнять задачу, запишем функцию  $F$  в виде двучленной формулы (66.11).

Вводим обозначения

$$\bar{v} = v_0, \quad \overline{3v \cos \theta} = v_1, \quad \sigma = -i\tau kv, \quad \xi = \frac{i\omega\tau - 1}{i\tau kv}, \quad (67.3)$$

после чего из (67.2) без труда получаем

$$(\cos \theta - \xi) v + \cos \theta \left( F_0 v_0 + \frac{1}{3} F_1 v_1 \cos \theta \right) = \\ = \frac{1}{\sigma} (v_0 + v_1 \cos \theta). \quad (67.4)$$

Далее решаем полученное уравнение относительно  $v$  и вычисляем  $\bar{v} = v_0$  и  $v \cos \theta = v_1/3$ . Таким путем находим два уравнения для двух величин  $v_0$  и  $v_1$ :

$$v_0 = F_0 v_0 w + \frac{1}{3} w F_1 v_1 - \frac{1}{\sigma} \frac{w+1}{\xi} v_0 - \frac{v_1}{\sigma} w, \quad (67.5)$$

$$\frac{1}{3} v_1 = F_0 v_0 \xi w - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3} - \xi^2 w \right) F_1 v_1 - \frac{w}{\sigma} v_0 - \frac{\xi w}{\sigma} v_1, \quad (67.6)$$

$$\text{где } w = \frac{\xi}{2} \ln \frac{\xi+1}{\xi-1} - 1.$$

Из условия совместности уравнений (67.5) и (67.6) получаем уравнение для определения комплексной скорости звука

$$\left(1 + \frac{1}{\xi^2}\right) \left(1 + \frac{F_1}{3}\right) - w \left\{ \left(1 + \frac{F_1}{3}\right) \left(F_0 - \frac{1}{\xi^2}\right) + \right. \\ \left. + \xi^2 \left(F_1 - \frac{3}{\xi^2}\right) \left(1 + \frac{1}{\xi^2}\right) \right\} = 0. \quad (67.7)$$

Это и есть искомое уравнение, определяющее зависимость скорости звука от частоты или, другими словами, описывающее дисперсию звука в ферми-жидкости. Рассмотрим сначала два предельных случая.

а) Малые частоты  $\omega\tau \ll 1$ . Следовательно,  $\sigma \rightarrow 0$ ,  $\xi\sigma \rightarrow -1$ ,  $\xi \rightarrow \infty$ . Разложение функции  $w$  по степеням  $1/\xi$  дает

$$w = \frac{1}{3\xi^2} + \frac{1}{5\xi^4},$$

и уравнение (67.7) после упрощений приобретает вид

$$\left(1 + \frac{1}{\xi^2}\right)^2 = \frac{1}{3\xi^2} \cdot \left(1 + \frac{F_1}{3}\right) \cdot \left(F_0 - \frac{1}{\xi^2}\right) + \\ + \frac{1}{5\xi^2} \left(1 + \frac{1}{\xi^2}\right) \cdot \left(F_1 - \frac{3}{\xi^2}\right). \quad (67.8)$$

Учитывая соотношения (67.3), имеем

$$\left(\frac{1 + \xi\sigma}{\sigma}\right)^2 = \left(\frac{\omega}{kv}\right)^2.$$

Из (67.8) и (67.3) находим в первом порядке по  $i\omega\tau$

$$\left(\frac{\omega}{kv}\right)^2 = \frac{1}{3} (1 + F_0) \left(1 + \frac{F_1}{3}\right) - \frac{4}{15} i\omega\tau \left(1 + \frac{F_1}{3}\right). \quad (67.9)$$

Первое слагаемое соответствует скорости обычного звука в ферми-жидкости. Поглощение же звука в области  $\omega\tau \ll 1$  находится элементарно из (67.9) как мнимая часть волнового вектора:

$$\gamma = \text{Im } k = \frac{2\omega^2\tau v^2}{15c^3} \left(1 + \frac{F_1}{3}\right). \quad (67.10)$$

Ввиду того что рассматриваемый случай соответствует обычному звуку, мы можем вместо (67.10) воспользоваться более точной обычной формулой

$$\gamma = \frac{\omega^2}{2\rho c^3} \left\{ \left(\frac{4}{3} \eta + \zeta\right) + \frac{\kappa}{c_p} \left(\frac{c_p}{c_v} - 1\right) \right\}.$$

Принимая во внимание, что  $\zeta \ll \eta$ , и то, что  $\kappa/c_p$ , будучи величиной порядка  $\eta$ , умножается на малый множитель  $c_p/c_v - 1$  (нетрудно убедиться, что он имеет

порядок  $(T/\mu)^2$ ), находим

$$\gamma = \frac{2\omega^2}{3\rho c^3} \eta. \quad (67.11)$$

Сравнивая это выражение с (67.10), мы можем найти соотношение, позволяющее по экспериментальным значениям вязкости найти время  $\tau$ :

$$\eta = \frac{1}{5} \rho \tau v^2 \left(1 + \frac{1}{3} F_1\right). \quad (67.12)$$

Из данных о вязкости

$$\tau \cong 1,5 \cdot 10^{-12} T^{-2} \text{сек} \quad (T - \text{в}^\circ \text{K}). \quad (67.13)$$

Для коэффициента поглощения при этом получаем

$$\gamma \sim 3 \cdot 10^{-15} \left(\frac{\omega}{T}\right)^2 \text{см}^{-1}. \quad (67.14)$$

б) Рассмотрим теперь второй предельный случай больших частот и низких температур  $\omega T \gg 1$ . В этом случае

$$\sigma \rightarrow \infty, \quad \xi \sigma \rightarrow \infty, \quad \xi = s + i\xi', \quad |\xi'| \ll s.$$

Уравнение (67.7) принимает вид

$$\left(1 + \frac{F_1}{3}\right) - w(s) \left\{ \left(1 + \frac{F_1}{3}\right) F_0 + s^2 F_1 \right\} = 0. \quad (67.15)$$

Это уравнение в точности совпадает с уравнением (66.23), определяющим скорость нулевого звука.

Что касается поглощения нулевого звука, то для вычисления его необходимо найти мнимую добавку к скорости звука  $\xi'$ . Из (67.7) получаем уравнение

$$\xi' \left\{ \frac{1}{w(s)} \left(1 + \frac{F_1}{3}\right) \left( \frac{s}{s^2 - 1} - \frac{w(s) + 1}{s} \right) - 2s w(s) F_1 \right\} - \frac{1}{\omega \tau} \left\{ \left(1 + \frac{F_1}{3}\right) (1 + w(s)) + w(s) s^2 (3 - F_1) \right\} = 0. \quad (67.16)$$

При помощи формул (67.3) находим коэффициент поглощения

$$\gamma = \text{Im } k = \frac{1}{\pi \tau v} - \frac{\omega \xi'}{s^2 v}, \quad (67.17)$$

Таким образом, поглощение нулевого звука не зависит от частоты и возрастает при увеличении температуры как  $1/\tau$ , т. е. пропорционально  $T^2$ .

В проведенном вычислении звук рассматривался классическим образом. Применимость этого рассмотрения ограничена неравенством  $\hbar\omega \ll T$ . В случае  $\hbar\omega \gtrsim T$  необходимо произвести квантовое рассмотрение. Убывание числа звуковых квантов в единицу времени благодаря столкновениям ферми-частиц равно

$$\begin{aligned} & \int w \{n_1 n_2 (1 - n'_1) (1 - n'_2) - n'_1 n'_2 (1 - n_1) (1 - n_2)\} \times \\ & \quad \delta \times (p' + p'_2 - p_1 - p_2 - \hbar k) \times \\ & \quad \delta \times (e'_1 + e'_2 - e_1 - e_2 - \hbar\omega) d\tau_1 d\tau_2 d\tau'_1 d\tau'_2. \end{aligned} \quad (67.18)$$

Функция четырех импульсов  $w$  неизвестна. Однако можно произвести вычисления таким образом, что коэффициент поглощения будет выражен через его классическое значение (67.17).

Пользуясь тем, что в существенной для задачи области размытия распределения Ферми сильно меняющимися функциями являются лишь числа заполнения  $n(\epsilon)$ , мы можем считать, что угловые интегралы дают некоторую константу, которая не меняется при переходе от классической области  $\hbar\omega \ll T$  к квантовой  $\hbar\omega \gtrsim T$ . В результате остается лишь интеграл по энергиям

$$\begin{aligned} I = & \int \{n_1 n_2 (1 - n'_1) (1 - n'_2) - n'_1 n'_2 (1 - n_1) (1 - n_2)\} \times \\ & \times \delta(e'_1 + e'_2 - e_1 - e_2 - \hbar\omega) de_1 de_2 de'_1 de'_2. \end{aligned} \quad (67.19)$$

Подставив в качестве  $n$  функцию Ферми и распространяя интегрирование от  $-\infty$  до  $\infty$  (это допустимо ввиду быстрой сходимости интегралов), мы после довольно длинных выкладок получаем

$$I = T^2 \frac{2\pi^2}{3} \hbar\omega \left[ 1 + \left( \frac{\hbar\omega}{2\pi T} \right)^2 \right]. \quad (67.20)$$

Коэффициент поглощения пропорционален интегралу  $I$ . Из предельного классического случая можно определить коэффициент пропорциональности. Так как при  $\hbar\omega \ll T$  должно получиться классическое значение  $\gamma$ , то в общем



случае имеем

$$\gamma = \gamma_{\text{кл}} \left[ 1 + \left( \frac{\hbar\omega}{2\pi T} \right)^2 \right], \quad (67.21)$$

где  $\gamma_{\text{кл}}$  дается формулой (67.17). Ввиду того что  $\gamma_{\text{кл}}$  пропорционально  $T^2$ , в предельном квантовом случае  $\hbar\omega \gg T$   $\gamma$  должно быть пропорционально  $\omega^2$ .

### § 68. Рассеяние света (флуктуации функции распределения) [42]

Согласно предыдущему условию возможности распространения «нулевого звука» является, в частности, неравенство

$$\omega_{\text{зв}} \tau \gg 1, \quad (68.1)$$

где  $\tau$  — время столкновений. Для  $\text{He}^3$  оно имеет порядок  $10^{-12} \cdot T^{-2}$  сек. Если даже взять температуру  $\sim 0,01^\circ\text{K}$ , то для непосредственного наблюдения нулевого звука необходима частота выше  $10^8$  гц.

Кроме этого способа, может быть применен косвенный метод, который заключается в наблюдении рэлеевского рассеяния света в жидком  $\text{He}^3$ . Как известно, при рэлеевском рассеянии в дополнение к основной линии возникают сателлиты, отличающиеся по частоте на

$$\Delta\omega = \pm 2 \frac{u}{c} \omega \sin \frac{\theta}{2},$$

где  $u$  — скорость звука,  $\theta$  — угол рассеяния. Скорость нулевого звука в  $\text{He}^3$  порядка  $2 \cdot 10^4$  см/сек, т. е.  $\Delta\omega \sim 10^{-6}\omega$ . Таким образом, наблюдение частотного распределения рассеянного света принципиально дает возможность измерить скорость нулевого звука. Условие (68.1) может быть удовлетворено благодаря большой частоте, соответствующей видимому свету.

Кроме этой стороны дела, рассеяние света в ферми-жидкости при достаточно низкой температуре имеет ряд специфических черт, ввиду чего представляет интерес теоретическое исследование этого явления, в особенности распределения интенсивности по частотам \*).

\*) Отметим, что в случае высоких температур, когда  $\omega_{\text{зв}} \tau \ll 1$ , рассеяние света будет описываться обычными формулами (см. [43]).

Как известно, частотное и угловое распределение для рэлеевского рассеяния неполяризованного света даются формулой [43] \*)

$$dh = \frac{\omega^4}{6\pi c^4} \frac{1}{2\pi V} \left| \int \delta D_{\Delta\omega}(r) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} dV \right|^2 \frac{3}{4} (1 + \cos^2 \theta) \frac{d\Omega}{4\pi} d\Delta\omega, \quad (68.2)$$

где  $\omega$  — частота падающего света,  $\theta$  — угол рассеяния,  $\mathbf{q}$  — изменение волнового вектора света, равное по абсолютной величине  $\frac{2\omega}{c} \sin \frac{\theta}{2}$ ,  $\delta D_{\Delta\omega}$  — компонента Фурье от флуктуации диэлектрической проницаемости  $\delta D(t)$ :

$$\delta D_{\Delta\omega} = \frac{1}{V t_0} \int_0^{t_0} \delta D(t) e^{i\Delta\omega t} dt, \quad (68.3)$$

где  $t_0$  — некоторая большая величина, которая в окончательной формуле будет устремлена к бесконечности.

Черта в формуле (68.2) означает усреднение по флуктуациям. В дальнейшем мы будем для простоты полагать объем систем равным единице.

Ввиду очень малой поляризуемости атомов гелия можно считать, что изменение диэлектрической проницаемости происходит в результате флуктуаций плотности, т. е.  $\delta D = \left( \frac{\partial D}{\partial N} \right) \delta N$ , где  $N$  — число частиц в единице объема. Но согласно общей теории ферми-жидкости число возбуждений равно числу атомов жидкости. Таким образом, можно написать

$$\int \delta D_{\Delta\omega}(r) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} dV = \frac{\partial D}{\partial N} \int \delta n_{\mathbf{q}, \Delta\omega}(\mathbf{p}) d\tau_{\mathbf{p}}, \quad (68.4)$$

где  $\delta n_{\mathbf{q}, \Delta\omega}(\mathbf{p})$  — компонента Фурье по  $\mathbf{r}$  и  $t$  (последнее в смысле формулы (68.3)) от флуктуации функции распределения возбуждений.

Прежде чем перейти к дальнейшим вычислениям, отметим одно важное обстоятельство. В формуле (68.2) проис-

\*) Здесь  $dh$  — так называемый дифференциальный коэффициент экстинкции. Интеграл от  $dh$  по  $d\Omega$  и  $d\Delta\omega$  дает полный коэффициент экстинкции  $h$ , представляющий собой декремент затухания плотности потока фотонов в среде.

ходит усреднение по всем возможным флуктуациям. В области температур и частот, где  $\hbar\Delta\omega \gtrsim T$ , такое усреднение необходимо производить с учетом квантовых эффектов. Однако для этого достаточно знать результат для чисто классического случая, т. е. при  $T \gg \hbar\Delta\omega$ , а затем ввести некоторый поправочный множитель. Для рассеяния с увеличением частоты на  $\Delta\omega$  (антистоксовское рассеяние) надо ввести множитель  $(\hbar\Delta\omega/T)N(\Delta\omega)$ , а для рассеяния с уменьшением частоты на  $\Delta\omega$  (стоксовское рассеяние) — множитель  $\left(\frac{\hbar\Delta\omega}{T}\right)[N(\Delta\omega) + 1]$ , где  $N(\Delta\omega)$  — функция распределения Бозе. Если для описания стоксовского рассеяния пользоваться отрицательными  $\Delta\omega$ , то благодаря соотношению  $N(-\Delta\omega) + 1 = -N(\Delta\omega)$  оказывается, что поправочный множитель для обоих случаев имеет вид

$$\frac{\hbar\Delta\omega}{T} [e^{\hbar\Delta\omega/T} - 1]^{-1}. \quad (68.5)$$

Итак, будем считать  $T \gg \hbar\Delta\omega$ . Для нахождения флуктуаций функции распределения воспользуемся методом, примененным уже для вычисления флуктуаций в гидродинамике. При помощи такого метода мы найдем флуктуацию «случайной силы», входящей в кинетическое уравнение, после чего, решая это уравнение, можно получить и флуктуации функции распределения.

Для случая ферми-жидкости будем исходить из кинетического уравнения, которое запишем в виде:

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} + \frac{\partial \delta n}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial n_0}{\partial \mathbf{p}} \int f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \frac{\partial \delta n(\mathbf{p}')}{\partial \mathbf{r}} d\tau_{p'} = I(\delta n) + y(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t). \quad (68.6)$$

За исключением «случайной силы»  $y(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$ , это уравнение представляет собой линейное по  $\delta n$  приближение кинетического уравнения (63.1).

В дальнейшем мы будем интересоваться только случаем частот и температур, удовлетворяющих соотношению (68.1), т. е. тем случаем, когда можно пренебречь столкновениями. При этом несущественна детальная форма интеграла столкновений, так как он играет роль вспомогательной величины при вычислениях и в окончательном результате может быть положен равным нулю. Ввиду этого

мы положим

$$I(\delta n) = -\delta n/\tau, \quad (68.7)$$

где  $\tau$  — большая величина. Далее необходимо найти скорость изменения энтропии. Принимая во внимание, что число частиц и полная энергия заданы, и используя соотношение

$$\delta \varepsilon(\mathbf{p}) = \int f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta n(\mathbf{p}') d\tau_{p'}, \quad (68.8)$$

находим

$$\dot{S} = - \left\{ \int \frac{\delta n [I(\delta n) + y]}{n_0 (1 - n_0)} d\tau_p dV + \frac{1}{T} \int f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta n I(\delta n') d\tau_p dV d\tau_{p'} dV' \right\}. \quad (68.9)$$

Принимая во внимание, что  $n_0 (1 - n_0) \approx T \delta(\varepsilon - \mu)$ , где  $\mu$  — химический потенциал, нетрудно понять, что  $\delta n(\mathbf{p})$  должно иметь вид

$$\delta n(\mathbf{p}) = v(\theta, \varphi) \cdot \delta(\varepsilon - \mu), \quad (68.10)$$

где  $\theta$  и  $\varphi$  — полярные углы вектора  $\mathbf{p}$ . Эта формула означает, что флуктуации функции распределения происходят только в области ферми-границы.

Такой же вид естественно предположить для  $y$ , т. е.

$$y(\mathbf{p}) = y^e(\theta, \varphi) \delta(\varepsilon - \mu). \quad (68.11)$$

Используем теперь обозначение

$$F(\chi) = \left[ f(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \frac{d\tau}{d\varepsilon} \right]_{\varepsilon=\varepsilon'=\mu},$$

где  $\chi$  — угол между  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}'$ , и разложим  $\delta n$ ,  $y$  и  $F$  по сферическим функциям

$$\left. \begin{aligned} v(\theta, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n A_n^m P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \\ y^e(\theta, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n y_n^m P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \\ F(\chi) &= \sum_{n=0}^{\infty} F_n P_n(\cos \chi). \end{aligned} \right\} \quad (68.12)$$

Так как  $v$  и  $y^e$  — действительные величины, то

$$A_n^m = (A_n^m)^*, \quad y_n^m = (y_n^m)^*.$$

Используя выражение (68.7) для интеграла столкновений, получим следующую формулу для скорости изменения энтропии:

$$\dot{S} = \int dV \left( \frac{d\tau_p}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=\mu} \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left( \frac{F_n}{2n+1} + 1 \right) \times \\ \times \frac{1}{2n+1} \left( \frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!} \right) \left( \frac{A_n^m}{\tau} - y_n^m \right) A_n^m. \quad (68.13)$$

Введем теперь обозначение

$$\dot{x}_n^m = -\frac{A_n^m}{\tau} + y_n^m. \quad (68.14)$$

Тогда для того чтобы уравнение (68.13) имело вид, применяемый обычно в теории флуктуаций

$$\dot{S} = - \sum_i X_i \dot{x}_i,$$

мы должны взять в качестве обобщенной силы  $X_i$  выражение

$$X_n^m = \frac{1}{T} \left( \frac{d\tau_p}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=\mu} \left( \frac{F_n}{2n+1} + 1 \right) \frac{1}{2n+1} \frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!} A_n^m. \quad (68.15)$$

В выражении (68.14) величина  $y_n^m$  играет роль «случайной силы». Записывая это соотношение в виде

$$\dot{x}_n^m = - \sum_{n'm'} \gamma_{n,n'}^{m,m'} X_{n'}^{m'} + y_n^m,$$

где коэффициенты  $\gamma$  без труда определяются из формулы (68.15), мы согласно общей теории флуктуаций имеем

$$\overline{y_n^m(r, t) y_{n'}^{m'}(r', t')} = (\gamma_{n,n'}^{m,m'} + \gamma_{n',n}^{m',m}) \delta(t-t') \delta(r-r') = \\ = \frac{2}{\tau} \delta_{n,n'} \delta_{m,-m'} \delta(r-r') \delta(t-t') \times \\ \times \left[ T \left( \frac{d\tau_p}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=\mu} \left( \frac{F_n}{2n+1} + 1 \right) \frac{1}{2n+1} \frac{(n+|m|)!}{(n-|m|)!} \right]^{-1}. \quad (68.16)$$

Наконец, воспользовавшись формулой (68.12) и соотношением

$$\sum_n (2n+1) P_n(\cos \chi) = 2\delta(\cos \chi - 1),$$

после некоторых преобразований получаем общее соотношение

$$\overline{y(p, r, t) y(p', r', t')} = \frac{2T}{\tau} \delta(r-r') \delta(t-t') \times \\ \times \left\{ \frac{(2\pi\hbar)^3}{2} \delta(p-p') \delta(\varepsilon-\mu) + \delta(\varepsilon-\mu) \delta(\varepsilon'-\mu) \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{d\varepsilon}{d\tau_p} \right)_{\varepsilon=\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n P_n(\cos \chi)}{1 + F_n/(2n+1)} \right\}. \quad (68.17)$$

При помощи этой формулы и кинетического уравнения (68.6) можно вычислить интересующие нас флуктуации функции распределения. Поскольку в общем случае произвольной функции  $f$  это довольно сложно, то мы ограничимся случаем  $f = \text{const}$ .

Воспользуемся тем, что флуктуации происходят лишь на ферми-поверхности, и при помощи уравнения (68.6) выразим  $v_{q, \Delta\omega}(\theta, \varphi)$  через соответствующую фурье-компоненту от  $y^e(\theta, \varphi)$ . Это дает

$$\int v_{q, \Delta\omega}(\theta, \varphi) \frac{d\Omega}{4\pi} = \\ = \int \frac{y_{q, \Delta\omega}^e(\theta, \varphi) \frac{d\Omega}{4\pi}}{-i\Delta\omega + \frac{1}{\tau} + iqv} \left( 1 + F_0 \int \frac{i(qv) \frac{d\Omega}{4\pi}}{-i\Delta\omega + \frac{1}{\tau} + iqv} \right)^{-1}, \quad (68.18)$$

где

$$v = (\partial\varepsilon/\partial p)_{\varepsilon=\mu}.$$

Усредняя квадрат модуля этого выражения при помощи формулы (68.17) (при этом надо помнить, что взятие фурье-компонент по  $t$  производится согласно формуле

(68.3)), находим

$$\left| \int v_{q, \Delta\omega}(\theta, \varphi) \frac{d\Omega}{4\pi} \right|^2 = 2 \left( \frac{d\varepsilon}{d\tau_p} \right)_{\varepsilon=\mu} \frac{T}{\tau} \left[ \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\left| qvx - \Delta\omega + \frac{i}{\tau} \right|^2} - \right. \\ \left. - \frac{F_0}{1+F_0} \left| \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\left| qvx - \Delta\omega + \frac{i}{\tau} \right|^2} \right|^2 \right] \times \\ \times \left| 1 + \frac{F_0}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{qvxdx}{\left| qvx - \Delta\omega + \frac{i}{\tau} \right|^2} \right|^{-2}. \quad (68.19)$$

Нас интересует предельное значение этого выражения при  $\tau \rightarrow \infty$ . В случае, когда  $qv > |\Delta\omega|$ , знаменатель не содержит полюсов, и существенным оказывается вычет в интеграле в числителе. При этом получаем

$$\frac{1}{2\pi} \left| v_{q, \Delta\omega}(p) d\tau_p \right|^2 = T \left( \frac{d\tau_p}{d\varepsilon} \right) \frac{1}{qv} \times \\ \times \left\{ \left[ 1 + F_0 \left( 1 - \frac{\Delta\omega}{2qv} \ln \frac{qv + \Delta\omega}{qv - \Delta\omega} \right) \right]^2 + \left( \frac{F_0 \Delta\omega \pi}{2qv} \right)^2 \right\}^{-1}. \quad (68.20)$$

В обратном случае, т. е. при  $qv \ll \Delta\omega$ , существенным является полюс в знаменателе выражения (68.19). Нетрудно видеть, что такой полюс возникает, если  $F_0 > 0$ , и равен  $\Delta\omega = \pm sqv$ , где  $s$  удовлетворяет уравнению

$$1 + F_0 \left[ 1 - \frac{s}{2} \ln \left( \frac{s+1}{s-1} \right) \right] = 0. \quad (68.21)$$

Это уравнение совпадает с уравнением (66.16), определяющим скорость нулевого звука. Пользуясь соотношением

$$\frac{1}{\pi} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1/\tau}{(\omega - \omega_0)^2 + \tau^{-2}} = \delta(\omega - \omega_0),$$

без труда получаем

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int v_{q, \Delta\omega}(p) d\tau_p \right|^2 = \\ = T \left( \frac{d\tau_p}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=\mu} \frac{2(s^2-1)}{F_0(1+F_0-s^2)} [\delta(\Delta\omega - sqv) + \delta(\Delta\omega + sqv)]. \quad (68.22)$$

Таким образом, распределение рассеянного света по углам и частотам имеет вид (мы ввели также квантовый множитель (68.5))

$$dh = \frac{\omega^4}{4\pi c^4} \left( \frac{\partial D}{\partial N} \right)^2 \left( \frac{d\tau_p}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=\mu} (1 + \cos^2 \theta) \frac{\hbar \Delta\omega}{e^{\hbar \Delta\omega/T} - 1} \times \\ \times \left[ \frac{\theta(qv - |\Delta\omega|)}{2qv} / \left\{ \left[ 1 + F_0 \left( 1 - \frac{\Delta\omega}{2qv} \ln \frac{qv + \Delta\omega}{qv - \Delta\omega} \right) \right]^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{F_0 \Delta\omega \pi}{2qv} \right)^2 \right\} + \frac{s^2 - 1}{F_0(1+F_0-s^2)} [\delta(\Delta\omega - sqv) + \right. \\ \left. + \delta(\Delta\omega + sqv)] \right] \frac{d\Omega}{4\pi} d\Delta\omega, \quad (68.23)$$

где

$$\theta(y) = \begin{cases} 1 & y > 0, \\ 0 & y < 0. \end{cases}$$

Полученный результат имеет простой физический смысл. Как легко видеть, частотный спектр состоит из средней части —  $qv < \Delta\omega < qv$  и двух резких линий при  $\Delta\omega = \pm sqv$ . Средняя часть соответствует доплеровскому уширению основной линии. Сравнение уравнения (68.21) с формулой (66.16) показывает, что боковые линии являются сателлитами в рэлеевском рассеянии, появляющимися в связи с возможностью распространения нулевого звука ( $sv = u$ ). Соотношение между интенсивностями центральной части и боковых сателлитов в общем случае зависит от угла рассеяния. Однако в предельных случаях высоких температур ( $T \gg \hbar\omega u/c$ ) и низких температур ( $T \ll \hbar\omega u/c$ ) это соотношение не зависит от угла. Можно произвести численные оценки для  $\text{He}^3$ , воспользовавшись для этого известными параметрами. При этом оказывается, что для случая высоких температур на центральную часть приходится ~20% всей интенсивности, а на боковые линии по 40%. В случае низких температур благодаря квантовому множителю распределение будет обрезаемо со стороны положительных  $\Delta\omega$ . В частности, из двух сателлитов останется только стоксовский с  $\Delta\omega = -uq$ , на который придется 90% интенсивности. На центральную часть в этом случае приходится только 10% всей интенсивности.

Полная интенсивность рассеяния получается интегрированием формулы (68.23) по  $d\Delta\omega$  и  $d\Omega$ . В случае высоких температур

$$(T \gg \hbar\Delta\omega \sim \hbar\omega \frac{u}{c})$$

она равна

$$h = \frac{\omega^4 T}{6\pi c^4} \left( \frac{\partial D}{\partial N} \right)^2 \left( \frac{\partial \epsilon_p}{\partial \epsilon} \right)_{\epsilon=\mu} J_1, \quad (68.24)$$

где  $J_1$  — численный интеграл, равный в случае  $\text{He}^3$  примерно 0,5.

В предельном квантовом случае ( $T \ll \hbar\omega u/c$ ) имеем

$$h = \frac{\hbar\omega^5 v}{6\pi c^4} \left( \frac{\partial D}{\partial N} \right) \left( \frac{\partial \epsilon_p}{\partial \epsilon} \right)_{\epsilon=\mu} J_2. \quad (68.25)$$

Здесь  $J_2$  — численный интеграл, равный в случае  $\text{He}^3$  примерно 0,2.

## ГЛАВА XV

### МИКРОСКОПИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ФЕРМИ-ЖИДКОСТИ

#### § 69. Разреженный ферми-газ [44]

В этом параграфе мы рассмотрим свойства неидеального ферми-газа, размеры частиц которого малы по сравнению со средней длиной волны. Эта модель, ряд свойств которой был рассмотрен Янгом и Хуангом [45], а также Янгом и Ли [46], была названа ими моделью твердых шариков. В действительности она имеет более общий характер и соответствует системе ферми-частиц с произвольными короткодействующими силами, радиус которых мал по сравнению со средней длиной волны.

Такая модель позволяет получить выражения для различных величин, описывающих ферми-жидкость, например, энергии, эффективной массы и функции  $f$  в виде разложения по степеням  $(a/\lambda)$  ( $a$  — радиус,  $\lambda$  — длина волны). Мы произведем расчет с точностью до членов порядка  $(a/\lambda)^2$ . В принципе аналогичным образом можно было бы определить и члены нескольких следующих порядков, но это не представляет специального интереса. Начнем с вычисления энергии.

Воспользуемся теорией возмущений по отношению к энергии взаимодействия частиц, которую запишем в виде (принимая для простоты объем газа за единицу)

$$V = 2U \sum_{\substack{n_1, n_2, m_1, m_2 \\ n_1 < n_2}} a_{m_1}^+ a_{m_2}^+ a_{n_2} a_{n_1}, \quad (69.1)$$

где  $a_i^+$  и  $a_i$  — операторы рождения и уничтожения частиц. Суммирование ведется с учетом сохранения полного

импульса, причем проекция спина состояния  $m_1$  равна проекции спина состояния  $n_1$  и аналогично для  $m_2$  и  $n_2$ . Вывод  $U$  за знак суммы соответствует тому, что взаимодействие между любыми парами частиц одинаково, причем амплитуда рассеяния не зависит от угла. Величина  $U$  в первом приближении связана с этой амплитудой соотношением

$$U = \frac{4\pi a \hbar^2}{m} \quad (69.2)$$

( $a$  — амплитуда  $s$ -рассеяния).

Добавка первого порядка к энергии равна диагональному матричному элементу от  $V$ :

$$E_n^{(1)} = 2U \sum_{n_1 < n_2} N_{n_1} N_{n_2} Q_{n_1 n_2}, \quad (69.3)$$

где  $N_i$  — числа заполнения.

Множитель  $Q_{ik}$  в формуле (69.3) учитывает то обстоятельство, что ферми-частицы с амплитудой рассеяния, не зависящей от угла, не взаимодействуют в случае параллельных спинов. Таким образом, мы будем считать, что

$$Q_{ik} = \frac{1}{4} - \sigma_i \sigma_k \quad (69.4)$$

( $\sigma_i$  — оператор спина  $i$ -й частицы).

Подставив в (69.3) формулы (69.2) и (69.4) получим

$$E^{(1)} = (2\pi a \hbar^2 / m) N^2 / 2. \quad (69.5)$$

Для нахождения поправки второго порядка воспользуемся выражением теории возмущений

$$E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} |V_{nm}|^2 / (E_n - E_m). \quad (69.6)$$

Подставив в эту формулу выражение (69.1), получаем следующую сумму

$$4U^2 \sum_{\substack{n_1, n_2, m_1, m_2 \\ n_1 < n_2}} \frac{N_{n_1} N_{n_2} (1 - N_{m_1}) (1 - N_{m_2}) Q_{n_1 n_2}}{E_{n_1} + E_{n_2} - E_{m_1} - E_{m_2}}, \quad (69.7)$$

где  $N_i$  — равновесные числа заполнения,  $E_i$  — энергии частиц.

Ввиду того что нашей целью является получение разложения энергии по степеням  $a$ , мы должны учесть, что соотношение (69.2) между  $U$  и амплитудой рассеяния не является точным, а справедливо лишь с точностью до членов первого порядка. При учете членов второго порядка вместо соотношения (69.2) получается следующее:

$$2U + 4U^2 \sum_{n_1, n_2} Q_{n_1 n_2} / (E_{n_1} + E_{n_2} - E_{m_1} - E_{m_2}) = 8\pi a \hbar^2 / m. \quad (69.2')$$

Если отсюда выразить  $U$  через  $a$  и подставить результат в формулу (69.3), то в выражении  $E^{(1)}$  возникнут члены, пропорциональные  $a^2$ , которые, естественно, следует отнести к поправке второго порядка. С учетом этого обстоятельства мы получаем следующее значение второго приближения к энергии:

$$E^{(2)} = 2U^2 \sum_{n_1, n_2, m_1, m_2} \left\{ \frac{N_{n_1} N_{n_2} (1 - N_{m_1}) (1 - N_{m_2}) Q_{n_1 n_2}}{E_{n_1} + E_{n_2} - E_{m_1} - E_{m_2}} - \frac{N_{n_1} N_{n_2} Q_{n_1 n_2}}{E_{n_1} + E_{n_2} - E_{m_1} - E_{m_2}} \right\}. \quad (69.7')$$

Ввиду того что выражение в скобках симметрично по  $n_1$  и  $n_2$ , заменим ограничение  $n_1 > n_2$  множителем  $1/2$ .

Смысл произведенной операции заключается в том, что разложение по степеням  $U$  в действительности не имеет места. Наличие постоянного  $U$  просто привело бы к бесконечности в энергии, как это видно непосредственно из формулы (69.7). В данном случае существенным обстоятельством является то, что амплитуда рассеяния  $a$  имеет конечную и притом малую величину, что делает возможным разложение по этой величине.

В первом слагаемом выражения (69.7') член с произведением четырех  $N_i$  равен нулю, ввиду того что знаменатель антисимметричен относительно замены  $n_1 n_2 \rightarrow m_1 m_2$ , в то время как числитель симметричен и все области суммирования одинаковы. Остающиеся два члена с произведениями трех  $N_i$  одинаковы. Таким образом, окончательно

получаем

$$E^{(2)} = -4U^2 \sum_{n_1, n_2, m_1, m_2} \frac{N_{n_1} N_{n_2} N_{m_1} Q_{n_1 n_2}}{E_{n_1} + E_{n_2} - E_{m_1} - E_{m_2}}. \quad (69.8)$$

Это и есть выражение для энергии, которое справедливо при выполнении основного предположения  $a/\lambda \ll 1$ .

Нашей целью является получение характеристик вырожденного ферми-газа. Из выражения (69.8) находим энергию основного состояния

$$E^{(2)} = -\frac{4U^2}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p}_1 \int_{|\mathbf{p}_1| < p_0} d\mathbf{p}_2 \int_{|\mathbf{p}_2| < p_0} d\mathbf{p}_3 \int_{|\mathbf{p}_3| < p_0} d\mathbf{p}_4 \frac{\delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_4)}{(p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 - p_4^2)^{1/2} 2m}. \quad (69.9)$$

где  $p_0$  — граничный импульс.

Энергия возбуждений согласно § 59 определяется соотношением

$$\varepsilon_i = \frac{\delta E}{\delta N_i}. \quad (69.10)$$

Вариация выражений (69.3) и (69.8) по  $N_i$  дает

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m} + \frac{UN}{2} + \frac{2U^2}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p}_1 \int d\mathbf{p}_2 \int d\mathbf{p}_3 \times \\ \times \left[ \frac{\delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p} - \mathbf{p}_3)}{(p^2 + p_3^2 - p_1^2 - p_2^2)^{1/2} 2m} - 2 \frac{\delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p} - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3)}{(p^2 + p_1^2 - p_2^2 - p_3^2)^{1/2} 2m} \right]. \quad (69.11)$$

Таким образом, задача о вычислении энергии основного состояния и эффективной массы возбуждений сводится к вычислению интегралов (69.9) и (69.11). Интегрирование является довольно громоздким ввиду высокой кратности интегралов и неудобств области интегрирования.

Вместо этого можно применить более простой способ основанный на введении функции  $f$ . Если ввести эту функцию

$$f_{ik} = \delta^2 E / \delta N_i \delta N_k, \quad (69.12)$$

то согласно (60.5), (66.7) мы можем определить эффективную массу и скорость звука малой частоты. Из скорости звука после соответствующего интегрирования можно найти энергию основного состояния.

Таким образом, задача сводится к определению величины  $f$ . Варьируя выражения (69.3) и (69.8) по  $N_i$ , а затем по  $N_k$ , находим следующее выражение

$$f = 2UQ_{\sigma\sigma'} - \frac{8U^2}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p}_1 \int_{|\mathbf{p}_1| < p_0} d\mathbf{p}_2 \times \\ \times \left[ Q_{\sigma\sigma'} \frac{\delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}' - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)}{(p^2 + p'^2 - p_1^2 - p_2^2)^{1/2} 2m} + \frac{1}{4} \frac{\delta(\mathbf{p} + \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}' - \mathbf{p}_2)}{(p^2 + p_1^2 - p'^2 - p_2^2)^{1/2} 2m} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \frac{\delta(\mathbf{p}' + \mathbf{p}_1 - \mathbf{p} - \mathbf{p}_2)}{(p'^2 + p_1^2 - p^2 - p_2^2)^{1/2} 2m} \right]. \quad (69.13)$$

При вычислении мы будем сразу полагать  $|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}_1| = p_0$ . Интегрирование во втором слагаемом в  $f$  значительно проще интегралов (69.9) и (69.11). В результате находим

$$f(\chi) = \frac{2\pi a \hbar^2}{m} \left[ 1 + 2 \left( \frac{3}{\pi} \right)^{\frac{1}{3}} a N^{\frac{1}{3}} \left( 2 + \frac{\cos \chi}{2 \sin \frac{\chi}{2}} \ln \frac{1 + \sin \frac{\chi}{2}}{1 - \sin \frac{\chi}{2}} \right) \right] - \\ - \frac{8\pi a \hbar^2}{m} (\sigma_1 \sigma_2) \left[ 1 + 2 \left( \frac{3}{\pi} \right)^{\frac{1}{3}} a N^{\frac{1}{3}} \left( 1 - \frac{\sin \frac{\chi}{2}}{2} \right) \ln \frac{1 + \sin \frac{\chi}{2}}{1 - \sin \frac{\chi}{2}} \right]. \quad (69.14)$$

Заслуживает внимания особенность полученного выражения. При углах  $\chi$ , близких к  $\pi$ , функция  $f$  имеет логарифмическую особенность

$$f(\chi) \sim \left( \frac{1}{4} - \sigma_1 \sigma_2 \right) \ln \frac{1}{\pi - \chi}. \quad (69.15)$$

Ясно, что в этом случае использованное нами приближение, строго говоря, неприменимо. Особенность функции  $f$  при  $\chi = \pi$  является отражением особенности в амплитуде рассеяния возбуждений, сталкивающихся под углом  $\pi$ . Соответствующее выражение, получающееся при помощи суммирования основных членов теории возмущений,

пропорционально

$$\left[ 1 + 2 \left( \frac{3}{\pi} \right)^{\frac{1}{3}} a N^{\frac{1}{3}} \ln \frac{p_0^2}{\varepsilon} \right]^{-1}, \quad (69.14)$$

где  $\varepsilon = p^2 + p'^2 - 2p_0^2$ .

В случае, когда  $a$  положительно, это выражение обращается в нуль при  $p^2 = p'^2 = p_0^2$ .

Если же  $a < 0$  (это допустимо для ферми-систем), то амплитуда рассеяния имеет полюс вблизи ферми-границы. Это соответствует возможности образования связанных пар из возбуждений с противоположными импульсами, которая была отмечена Купером и является основной причиной явления сверхпроводимости металлов.

Таким образом, найденное для  $f$  выражение несправедливо при углах, близких к  $\pi$ . Однако ввиду того что особенность является логарифмической, она сказывается лишь в непосредственной близости особой точки. А так как в интересующие нас выражения входят лишь интегралы от  $f$  с регулярными функциями, то логарифмическая особенность функции  $f$  не существенна.

Подставляя формулу (69.14) в (60.5), находим значение эффективной массы

$$m/m^* = 1 - (3/15) (3/\pi)^{1/3} (7 \ln 2 - 1) a^2 N^{2/3}. \quad (69.17)$$

Отметим, что если подставить сюда значение  $m^* = 3,08m$ , соответствующее жидкому  $\text{He}^3$ , то получающееся значение  $a$ , оказывается, имеет порядок газокинетического диаметра атома гелия. Конечно, такое сравнение не имеет строгого смысла. Рассмотренная модель не может описывать жидкий  $\text{He}^3$ . Это видно уже из того, что величина  $(m^* - m)/m^*$ , которая согласно теории должна быть величиной второго порядка малости по  $a$ , для случая  $\text{He}^3$  равна  $2/3$ .

Подставляя формулу для  $f$  в выражение для скорости звука, получаем

$$c^2 = \frac{\pi^{\frac{4}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}} N^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{m^3} + 2 \frac{\pi a \hbar^2}{m^2} N \left[ 1 + \frac{4}{15} \left( \frac{3}{\pi} \right)^{\frac{1}{3}} a N^{\frac{1}{3}} (11 - 2 \ln 2) \right] \quad (69.18)$$

Из найденной величины  $c^2$  нетрудно получить энергию основного состояния ферми-жидкости. Для этого воспользуемся соотношением (66.2)  $c^2 = \frac{N}{m} \left( \frac{\partial \mu}{\partial N} \right)$ . Это дает

$$E = \int \mu dN = E^{(0)} + \frac{\pi a \hbar^2}{m} N^2 \left[ 1 + \frac{6}{35} \left( \frac{3}{\pi} \right)^{\frac{1}{3}} a N^{\frac{1}{3}} (11 - 2 \ln 2) \right]. \quad (69.19)$$

Тот же результат можно получить и при помощи непосредственного интегрирования в формуле (69.9). Для вычисления интеграла в формуле (69.9) удобно ввести новые переменные

$$p = p_1 - p_2; \quad q = p_3 - p_4; \quad s = p_1 + p_2 = p_3 + p_4.$$

В этих переменных  $E^{(2)}$  принимает вид

$$E^{(2)} = - \frac{m U^2}{4(2\pi\hbar)^2} \int ds \int dp \int dq \frac{1}{p^2 - q^2},$$

где область интегрирования для вектора  $s$  есть  $0 < |s| < 2p_0$ , а области значений векторов  $p$  и  $q$  изображены на

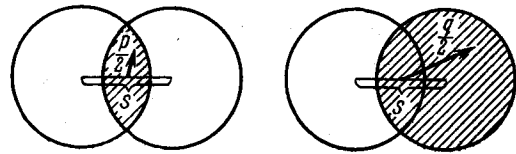


Рис. 12.

рис. 12. Если ввести переменные  $x_q = \cos(q, s)$  и  $x_p = \cos(p, s)$ , то  $E^{(2)}$  станет равным

$$E^{(2)} = - \frac{8m U^2 \pi^3}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{2p_0} s^2 ds \int_0^{x_p} dx_p \int_0^{x_q} p^2 dp \int_{-1}^1 dx_q \int_0^{x_q} q^2 dq \frac{1}{p^2 - q^2},$$

где  $z(x)$  удовлетворяет соотношению

$$z^2 + 2zxs + s^2 = 4p_0^2.$$



Путем ряда преобразования и интегрирования по частям по  $dx_p$  и  $dx_q$  находим отсюда

$$E^2 = \frac{2mU^2 p_0^2}{\pi^6 \hbar^3} \int_0^{1+s} s^2 ds \left[ \int_0^{1+s} p^3 dp \int_0^{1-s} q^2 dq + \right. \\ \left. + \frac{1}{4s^3} \int_{1-s^2}^{1+s} p dp (1-p^2-s^2) \int_{1-s^2}^{1-s} q dq (1-q^2-s^2) \right] \frac{1}{p^3 - q^3}.$$

Интегрируя далее по частям по  $s$  и выполнив затем оставшееся интегрирование, получаем

$$E^{(2)} = (\epsilon/35) (3/\pi)^{1/2} (11 - 2 \ln 2) a N^{1/2} E^{(1)}.$$

Здесь мы выразили  $U$  согласно формуле (69.2) и подставили  $p_0 = \hbar (3\pi^2 N)^{1/3}$ . Этот результат совпадает с членом второго порядка в формуле (69.19).

## § 70. Микроскопическая теория ферми-жидкости при $T=0$

Здесь мы изложим построенную Л. Д. Ландау [47] общую микроскопическую теорию ферми-жидкости при  $T=0$ , справедливую для произвольных взаимодействий. Как мы увидим, в результате такого рассмотрения удастся обосновать феноменологическую теорию и понять физический смысл входящей в нее функции  $f$ .

В основе микроскопического рассмотрения лежат методы, заимствованные из квантовой теории поля. Как известно, квантовая теория поля оперирует средними по вакууму от хронологизированных (т. е. взятых в порядке последовательности времен) произведений операторов поля. Это так называемые гриновские функции. В нашем случае вместо средних по вакууму мы будем рассматривать средние по основному состоянию системы. Нетрудно убедиться, что такие средние обладают теми же свойствами, что и гриновские функции теории поля, в частности, они могут быть принципиально вычислены с помощью техники диаграмм Фейнмана.

Для определенности мы будем впредь называть гриновской функцией величину

$$G_{1,2} = -i \langle T (\psi_1 \psi_2^\dagger) \rangle, \quad (70.1)$$

где скобки  $\langle \rangle$  означают усреднение по основному состоянию,  $\psi$  и  $\psi^\dagger$  — операторы поля ферми-частиц, индексы 1, 2 обозначают совокупность пространственно-временных и спинных координат,  $T$ , как обычно, обозначает хронологизированное произведение с изменением знака, когда  $\psi_1$  и  $\psi_2^\dagger$  переставлены. Гриновская функция при отсутствии внешнего поля зависит лишь от разности координат и времен. Что же касается спинных индексов, то если взаимодействие частиц не зависит от их спина,  $G_{\alpha\beta} \sim \delta_{\alpha\beta}$ .

Фурье-образ функции Грина по разности координат и времен мы обозначим через  $G(p)$   $\delta_{\alpha\beta}$  (здесь  $p$  — четырехмерный вектор  $(p, \epsilon)$ ). Полюса  $G(p)$  определяют энергию квазичастиц. Если  $p$  по абсолютной величине близко к  $p_0$ , а  $\epsilon$  близко к граничной энергии  $\mu$ , то  $G(p)$  имеет вид

$$G(p) = \frac{a}{\epsilon - \mu - v(p - p_0) + i\delta}. \quad (70.2)$$

Здесь  $a$  — положительная константа,  $\delta$  — малая величина, знак которой совпадает со знаком  $\epsilon - \mu$  или вблизи полюса со знаком  $p - p_0$  (она вводится для определения правила обхода полюсов, соответствующего взятию  $T$ -произведения в  $x, t$ -представлении).

Введем теперь среднее от хронологизированного произведения четырех операторов

$$\Phi_{12,34} = \langle T (\psi_1 \psi_2 \psi_3^\dagger \psi_4^\dagger) \rangle. \quad (70.3)$$

Назовем вершинной частью  $\Gamma_{12,34}$  величину, определяемую следующим соотношением:

$$\Phi_{12,34} = G_{1,3} G_{2,4} - G_{1,4} G_{2,3} + \\ + i \sum_{1', 2', 3', 4'} G_{1,1'} G_{2,2'} G_{3,3'} G_{4,4'} \Gamma_{1'2', 3'4'}. \quad (70.4)$$

Фурье-представление вершинной части имеет вид

$$(2\pi\hbar)^4 \Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta} (p_1 p_2, p_3 p_4) \delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4).$$

При перестановке  $\alpha p_1 \rightleftharpoons \beta p_2$  функция  $\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1 p_2, p_3 p_4)$ , очевидно, меняет знак. Аналогично квантовой теории поля, функция  $\Gamma$  с определенной связью между компонентами каждого из векторов  $p$  (например, вблизи ферми-границы  $\varepsilon - \mu = v(p - p_0)$ ), умноженная на  $a^2$ , играет роль амплитуды рассеяния квазичастицы.

Рассмотрим  $\Gamma$  в случае, когда  $p_1$  близко к  $p_3$  и, следовательно,  $p_2$  близко к  $p_4$ , и введем определение

$$\Gamma(p_1 p_2, p_1 + K \ p_2 - K) \equiv \Gamma(p_1 p_2, K),$$

где  $K = (k, \omega)$  — малый 4-вектор.

Если бы такую вершинную часть можно было рассчитывать по теории возмущений, то в первом порядке надо было бы взять диаграммы, изображенные на рис. 13, I.

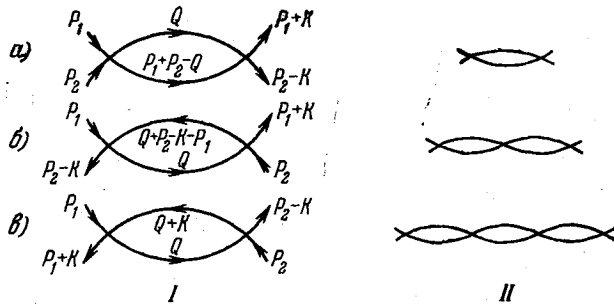


Рис. 13.

Соответствующие выражения содержат интегралы от произведения двух гриновских функций. В то время как для диаграмм а) и б) случай ничем не выделен, в случае в) полюса обеих гриновских функций сближаются при  $K = 0$ , что, как мы увидим ниже, приводит к появлению особенности в  $\Gamma$ .

Если обозначить через  $\Gamma^{(1)}$  совокупность всех возможных диаграмм для  $\Gamma$ , не имеющих «особенных элементов» (т. е. интеграла от  $G(p) G(p + K)$ ), то нетрудно видеть, что полная  $\Gamma$  получается с помощью суммирования «лестницы», изображенной на рис. 13, II. Это может быть про-

изведено посредством решения интегрального уравнения

$$\Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}(p_1 p_2; K) = \Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}^{(1)}(p_1 p_2) - \frac{i}{(2\pi\hbar)^4} \int \Gamma_{\alpha\beta,\gamma\delta}^{(1)}(p_1 Q) \times \\ \times G(Q) G(Q + K) \Gamma_{\gamma\delta,\alpha\beta}(Q p_2; K) d^4 Q. \quad (70.5)$$

Здесь, ввиду того что при  $K = 0$   $\Gamma^{(1)}$  не имеет особенностей, мы просто положим везде в  $\Gamma^{(1)}$   $K = 0$ .

Рассмотрим теперь произведение в интеграле. Интеграл по  $Q$  будет состоять из главного значения и члена, происходящего от обхода полюсов. Ввиду близости аргументов обоих  $G$  можно считать, что все остальные члены в интеграле в этих полюсах имеют одинаковые значения. Вклад от обхода полюсов возникает, таким образом, лишь в том случае, если они находятся по разные стороны от действительной оси. Для этого должно быть  $q < p_0$ ,  $|q + k| > p_0$  или наоборот. Принимая во внимание малость, нетрудно видеть, что при этом  $q \approx p_0$  и  $\varepsilon_q \approx \mu$ . Таким образом, в той части интеграла по  $Q$ , которая связана с обходами полюсов, произведение  $G(Q) G(Q + K)$  может быть заменено на  $A \delta(\varepsilon - \mu) \delta(q - p_0)$ .

Коэффициент  $A$  может быть установлен с помощью интегрирования  $G(Q) G(Q + K)$  и оказывается равным  $\frac{2\pi i a^2 k \cos \theta}{\omega - vk \cos \theta}$ , где  $\theta$  — угол между  $q$  и  $k$ . Таким образом, произведение  $G(Q) G(Q + K)$  может быть записано в виде

$$G(Q) G(Q + K) = 2\pi i a^2 \frac{k \cos \theta}{\omega - vk \cos \theta} \delta(\varepsilon - \mu) \delta(q - p_0) + \\ + \varphi(Q), \quad (70.6)$$

где  $\varphi$  соответствует главному значению интеграла и не имеет особенностей (поэтому в нем положено  $K = 0$ ).

Если рассматривать выражение (70.6) в пределе  $K = 0$ , то очень существенно, каким способом берется этот предел, т. е. каково при этом соотношение между  $\omega$  и  $k$ . То же самое справедливо и в отношении  $\Gamma$  в пределе  $\omega \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow 0$ .

Рассмотрим прежде всего  $\Gamma$  в пределе  $k \rightarrow 0$ ,  $\frac{k}{\omega} \rightarrow 0$ . Для этого предела, который мы обозначим как  $\Gamma^\omega$ ,

получаем из (70.5) и (70.6)

$$\Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}^{\omega}(p_1 p_2) = \Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}^{(1)}(p_1 p_2) - \frac{i}{(2\pi\hbar)^4} \int \Gamma_{\alpha\epsilon, \gamma\zeta}^{(1)}(p, Q) \varphi(Q) \times \\ \times \Gamma_{\zeta\beta, \epsilon\delta}^{(\omega)}(Q p_2) d^4 Q. \quad (70.7)$$

Из двух уравнений (70.5) и (70.7) нетрудно исключить  $\Gamma^{(1)}$ . Применяя (70.6) после несложных преобразований, находим

$$\Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}(p_1 p_2; K) = \Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}^{(\omega)}(p_1 p_2) + \\ + \frac{a^2 p_0^2}{(2\pi\hbar)^3} \int \Gamma_{\alpha\epsilon, \gamma\zeta}^{\omega}(p_1, Q) \Gamma_{\zeta\beta, \epsilon\delta}(Q p_2, K) \frac{k \cos \theta}{\omega - vk \cos \theta} d\Omega. \quad (70.8)$$

Возьмем теперь другой предел, а именно  $K \rightarrow 0$ ,  $\omega/k \rightarrow 0$ . Такое предельное значение, умноженное на  $a^2$ , соответствует физической амплитуде рассеяния вперед для квазичастиц с энергией на границе Ферми. Эту величину обозначим через  $\Gamma^k$ . Из уравнения (70.8) находим связь между  $a^2 \Gamma^k$  и  $a^2 \Gamma^{\omega}$

$$a^2 \Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}^k(p_1 p_2) = a^2 \Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}^{\omega}(p_1 p_2) - \\ - \frac{p_0^2}{v(2\pi\hbar)^3} \int a^2 \Gamma_{\alpha\epsilon, \gamma\zeta}^{\omega}(p_1, Q) a^2 \Gamma_{\zeta\beta, \epsilon\delta}^k(Q p_2) d\Omega. \quad (70.9)$$

Исследуем теперь полюса функции  $\Gamma(p_1 p_2; K)$ . Наподобие того как полюса функции  $G(p)$  дают связь между энергией и импульсом фермиевских возбуждений, полюса функции  $\Gamma$  характеризуют «двухчастичные», иначе говоря, бозевские возбуждения. Ввиду того, что в окрестности полюса  $\Gamma(p_1 p_2; K) \gg \Gamma^{\omega}(p_1 p_2)$ , можно пренебречь членом  $\Gamma^{\omega}$  в правой части. Далее, должно заметить, что переменная  $p_2$ , а также индексы  $\beta$  и  $\delta$  играют в уравнении роль параметров. Функция  $\Gamma$  может быть представлена в виде произведения  $\chi_{\alpha\gamma}(p_1; K)$ ,  $\chi_{\beta\delta}(p_2)$  и  $\chi(p_2)$  и сокращается в обеих сторонах уравнения. Если еще ввести обозначение

$$v_{\alpha\gamma}(n) = \frac{nk}{\omega - vnk} \chi_{\alpha\gamma}(p_1; K),$$

где  $n$  — единичный вектор в направлении  $p_1$ , то для  $v_{\alpha\gamma}$

получаем уравнение

$$(\omega - vnk) v_{\alpha\gamma}(n) = nk \frac{p_0^2 a^2}{(2\pi\hbar)^3} \int \Gamma_{\alpha\epsilon, \gamma\zeta}^{\omega}(n, l) v_{\zeta\epsilon}(l) d\Omega. \quad (70.10)$$

Сравнивая это уравнение с (66.14) и (68.4), нетрудно увидеть, что оно совпадает с уравнением для нулевого звука и спиновых волн, причем величина  $a^2 \Gamma^{\omega}$  играет роль функции  $f$ . Это подтверждают уравнения для нулевого звука, полученные из феноменологической теории и, тем самым, сделанное в последней предположение о функциональной зависимости энергии возбуждений от функции распределения. С другой стороны, благодаря уравнению (70.9) устанавливается связь между функцией  $f$  и амплитудой рассеяния квазичастиц под углом  $0^\circ$ .

Рассмотрим более подробно это соотношение. Обозначая амплитуду, умноженную на  $\left(\frac{d\tau}{d\epsilon}\right)_{\epsilon=\mu}$ , через  $A(n_1 \sigma_1, n_2 \sigma_2)$ , получаем

$$A(n_1 \sigma_1, n_2 \sigma_2) = \Phi(n_1 \sigma_1, n_2 \sigma_2) - \\ - \frac{1}{2} \text{Sp}'_{\sigma'} \int \Phi(n_1 \sigma_1, n' \sigma') A(n' \sigma', n_2 \sigma_2) \frac{d\Omega}{4\pi}. \quad (70.11)$$

В отношении спиновой зависимости как  $\Phi$ , так и  $A$  содержат два члена: не зависящий от спинов и пропорциональный  $\sigma_1 \sigma_2$ . Если обозначить

$$A(n_1 \sigma_1, n_2 \sigma_2) = B(n_1 n) + \sigma_1 \sigma_2 C(n_1, n_2), \quad (70.12)$$

$B$  и  $C$  удовлетворяют уравнениям

$$B(n_1, n_2) = F(n_1, n_2) - \int F(n_1, n') B(n', n_2) \frac{d\Omega}{4\pi}, \quad (70.13)$$

$$C(n_1, n_2) = Z(n_1, n_2) - \frac{1}{4} \int Z(n_1, n') C(n', n_2) \frac{d\Omega}{4\pi}.$$

Будучи скалярными, величины  $B$  и  $C$  так же как и  $F$  и  $Z$ , могут зависеть только от  $\cos \chi$ . Если ввести разложение по сферическим функциям,  $B(\chi) = \sum B_l P_l(\cos \chi)$  и т. п., то без труда можно получить соотношения между коэффициентами  $B_l$  и  $F_l$ ,  $C_l$  и  $Z_l$ :

$$B_l = \frac{F_l}{1 + \frac{F_l}{2l+1}}, \quad C_l = \frac{Z_l}{1 + \frac{Z_l}{4(2l+1)}}. \quad (70.14)$$

Найдем для примера амплитуду рассеяния возбуждений для разреженного ферми-газа. Из формул (69.14) и (70.13) получаем

$$A(\chi, \sigma_1 \sigma_2) = 8 \left( \frac{3}{\pi} \right)^{\frac{1}{3}} a N^{\frac{1}{3}} \left( \frac{1}{4} - \sigma_1 \sigma_2 \right) + 16 \left[ \left( \frac{3}{\pi} \right)^{\frac{1}{3}} a N^{\frac{1}{3}} \right]^2 \left[ \frac{1}{4} - \sigma_1 \sigma_2 + \frac{\cos \chi}{8 \sin \frac{\chi}{2}} \ln \frac{1 + \sin \left( \frac{\chi}{2} \right)}{1 - \sin \left( \frac{\chi}{2} \right)} - \sigma_1 \sigma_2 \left( 1 - \frac{\sin \left( \frac{\chi}{2} \right)}{2} \ln \frac{1 + \sin \left( \frac{\chi}{2} \right)}{1 - \sin \left( \frac{\chi}{2} \right)} \right) \right]. \quad (70.15)$$

Отметим, что в случае параллельных спинов это выражение обращается в нуль для  $\chi = 0$ , как и должно быть согласно принципу Паули (для  $f$  это не имеет места).

### § 71. О возможности сверхтекучести в He<sup>3</sup>

Рассмотрим систему, состоящую из ферми-частиц, взаимодействие между которыми не является слабым. Пусть потенциальная энергия взаимодействия в импульсном представлении имеет вид

$$V(p - p') = \sum V_l P_l(\cos \theta), \quad (71.1)$$

т. е. в окрестности ферми-поверхности зависит только от угла  $\theta$  между импульсами сталкивающихся частиц и не зависит от их величины. Тогда можно строго показать, что если хоть один из коэффициентов  $V_l$  имеет знак, соответствующий притяжению, то образуются пары частиц с моментом  $l$  (\*). Это утверждение является обобщением известного феномена Купера, лежащего в основе теории

сверхпроводимости. Более строго этот вопрос исследуется методами теории поля. Оказывается, что диаграммы вида

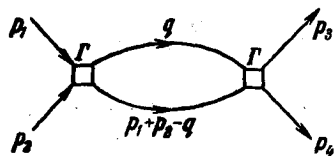


Рис. 14.

\*) Этот результат был получен А. А. Абрикосовым, Л. П. Горьковым, Л. Д. Ландау и И. М. Халатниковым (1958).

при малых значениях суммы  $|p_1 + p_2|$  и  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$  являются особыми. Суммируя диаграммы такого типа, получаем уравнение для вершинной части  $\Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}(p_1, p_3; s)$  ( $s = p_1 + p_2$ )

$$s_4 \frac{\partial}{\partial s_4} \Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}(p_1, p_3; s) = s \frac{\partial}{\partial s} \Gamma_{\alpha\beta, \gamma\delta}(p_1, p_3; s) = \frac{a^2 p_0^2}{2 \cdot (2\pi\hbar)^3 v} \int \Gamma_{\alpha\beta, \xi\eta}(p_1, q; s) \Gamma_{\xi\eta, \gamma\delta}(q, p_3, s) d\Omega \quad (71.2)$$

$$(|q| = p_0, q_4 = 0).$$

Далее разлагая  $\Gamma$  в ряд

$$\Gamma(p_1, p_3, s) = \sum \Gamma_l P_l(\cos \theta), \quad (71.3)$$

находим решение

$$\Gamma_l(s_4, |s|) = - \frac{(2\pi\hbar)^3 v (2l+1)}{2\pi a^2 p_0^2} \frac{1}{\ln s_4 |s| + f_l \frac{s_4}{|s|}}, \quad (71.4)$$

$f_l$  — произвольная функция, при  $x \rightarrow \infty$   $f_l(x) = \ln \frac{x}{(c_1^l)^2}$ ,

$f_l(x \rightarrow 0) = \ln \frac{v^2}{(c_2^l)^2 x}$ ;  $c_1^l, c_2^l$  — константы, имеющие размерность энергии;  $\Gamma_l(s_4, 0)$  при малых  $c^l$  имеет полюс. Наличие такого полюса означает образование связанного состояния из двух ферми-частиц с моментом  $l$ .

Как известно, до сих пор при температурах  $T > 0,01^\circ \text{K}$  жидкий He<sup>3</sup> оставался несверхтекучим. Это свидетельствует о том, что взаимодействие между элементарными возбуждениями в He<sup>3</sup> на расстояниях порядка межатомных имеет отталкивательный характер. В противном случае атомы He<sup>3</sup>, подобно электронам в сверхпроводящем металле, образовали бы куперовские пары с энергией связи порядка фермиевской энергии. Это приводило бы к тому, что He<sup>3</sup> делался бы сверхтекучим при температурах порядка температуры фермиевского вырождения.

Однако, как мы видели, всегда существует возможность спаривания атомов He<sup>3</sup> с неравным нулю моментом импульса относительного движения. Заметим, что большие

значения  $l$  означают большие расстояния между частицами. Но на больших расстояниях между атомами  $\text{He}^3$  должны действовать силы, аналогичные ван-дер-ваальсовым силам, действующим между удаленными атомами. Эти силы в случае одинаковых атомов всегда имеют характер притяжения независимо от свойств окружающей среды. Наличие таких сил должно приводить к появлению пар и, следовательно, к свойству сверхтекучести. Однако, поскольку взаимодействие на больших расстояниях является очень слабым, такой переход должен иметь место при очень низких температурах.

Приведенные рассуждения нуждаются в некотором уточнении, поскольку взаимодействие элементарных возбуждений в жидкости существенно отличается от взаимодействия изолированных атомов. Более строгое рассмотрение вопроса упрощается благодаря следующему счастливому обстоятельству. Оказывается, что атомы  $\text{He}$  обладают жесткими электронными оболочками, благодаря чему диэлектрическая постоянная гелия близка к единице. Это приводит к тому, что сила взаимодействия между двумя атомами (или возбуждениями) практически равна силе, действующей между двумя изолированными атомами гелия.

Действительно, поляризуемость взаимодействующих атомов не меняется от наличия соседних атомов, сила же их взаимодействия, поскольку диэлектрическая постоянная близка к единице, не изменяется от наличия между взаимодействующими атомами других атомов. При этом, однако, амплитуда рассеяния атомов друг на друге может существенным образом изменяться, так как наличие других атомов влияет на движение рассматриваемых атомов, взаимодействием которых мы интересуемся.

В принципе, возможно было бы даже получить в среде другой знак амплитуды рассеяния двух атомов по сравнению с вакуумным.

Однако оказывается, что для ферми-жидкости с малой поляризуемостью атомов можно строго показать, что знак амплитуды рассеяния возбуждений в жидком  $\text{He}^3$  совпадает со знаком амплитуды рассеяния двух атомов в пустоте  $F(k^2)$ . При этом имеет место следующая

связь:

$$F_s = \frac{m^*}{m} \left( v \frac{dp_0}{d\mu} \right)^2 \bar{F}(k^2), \quad k^2 = 2p^2(1 - \cos \theta). \quad (71.5)$$

Доказательство этого результата основано на возможности математического выделения эффектов, определяющих дальнедействующими силами, т. е. силами, убывающими с расстоянием подобно силам Ван дер Ваальса по степенному (а не экспоненциальному) закону [48]. Наличие таких сил приводит к появлению в амплитуде рассеяния членов, имеющих особенность типа точки ветвления по квадрату передачи импульса

$$k^2 = 2p^2(1 - \cos \theta) \quad (71.6)$$

при  $k^2 = 0$  ( $\theta$  — угол рассеяния,  $p$  — импульс в системе центра инерции). В этом можно легко убедиться по теории возмущений. Два одинаковых атома взаимодействуют на больших расстояниях по закону

$$V = -\frac{3}{\pi} \int_0^\infty \alpha^2(i\xi) d\xi \frac{1}{r^6}, \quad (71.7)$$

$\alpha(\omega)$  — поляризуемость атома. Такое взаимодействие дает в амплитуде рассеяния особый член вида

$$F(k^2) = k^3 \frac{m}{16} \int_0^\infty \alpha^2(i\xi) d\xi. \quad (71.8)$$

Именно такие особые члены определяют асимптотическое поведение фаз рассеяния при больших  $l$ . Члены же, не имеющие при  $k^2 = 0$  особенности в амплитуде рассеяния, дают при разложении по полиномам Лежандра выражения, экспоненциально убывающие при  $l \rightarrow \infty$ .

Между изолированными атомами гелия действуют силы притяжения на больших расстояниях с энергией

$$V = -V_0 (R/r)^6 \quad (71.9)$$

( $V_0 \approx 40^\circ \text{ K}$ ,  $R \approx 2,6 \text{ \AA}$ ). Потенциальная энергия взаимодействия возбуждений согласно (71.5) отличается от (71.9) лишь некоторым перенормировочным множителем,

который можно записать в следующем удобном виде:

$$\Phi = (mc_0^2/m^*c^2)^2, \quad (71.10)$$

$c^2$  — сжимаемость жидкого  $\text{He}^3$ ,  $c_0^2 = 3m^2(2\pi\hbar)^{-2}(8\pi/3N)^{1/2}$  — сжимаемость идеального газа Ферми с массой  $m$  и плотностью  $N$ . Поскольку  $N = 1,5 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ ,  $c_0 = 93 \text{ м/сек}$ ,  $m^* = 3m$ ,  $c = 188 \text{ м/сек}$ , то  $\Phi = 6,7 \cdot 10^{-3}$ . Таким образом, взаимодействие возбуждений на два порядка слабее взаимодействия свободных атомов.

Для оценки температуры перехода  $\text{He}^3$  в сверхтекучее состояние удастся провести анализ феномена Купера с помощью температурных функций Грина. Как известно, функция Грина в бозе-газе

$$G(\omega, q) = \frac{1}{i\omega - (q^2/2m) + \mu}, \quad \omega = 2\pi\hbar T, \quad (71.11)$$

при  $\omega = 0$ ,  $q = 0$  впервые обращается в бесконечность в точке перехода, т. е. при  $\mu = \mu(T_c) = 0$ . В этот момент на основном уровне впервые собирается бесконечно большое число частиц, начинается бозе-конденсация. Аналогом функции Грина бозе-частиц для связанной пары ферми-частиц является вершинная часть  $\Gamma$ . Обращение последней при  $q = q_1 + q_2 = 0$ ,  $\omega = \omega_1 + \omega_2 = 0$  в бесконечность при некоторой температуре означает, что в этот момент образуются куперовские пары, образующие конденсат. Вычисление вершинной части  $\Gamma$  позволяет найти температуру, при которой в ферми-жидкости начинается спаривание, она оказывается равной [49]

$$T_c = (p_0^2/m^*\pi l)e^{13/8}e^{-1/\kappa}, \quad (71.12)$$

$$\kappa \approx \frac{0,66}{(l + 5/2)(l^2 - 1/4)(l^2 - 9/4)}.$$

Формула (71.12) асимптотически верна при больших значениях  $l$ . Оценка температуры  $T_c$ , даваемая формулой (71.12), поэтому оказывается весьма грубой. Фактически спаривание происходит при сравнительно малых  $l$  (по-видимому,  $l = 2$ ). Малым  $l$  соответствует взаимодействие возбуждений на расстояниях порядка атомных. Пользоваться силами взаимодействия между изолированными

атомами гелия при этом не имеет смысла, поскольку на таких расстояниях силы вообще не сводятся к двухчастичным. Если пользоваться формулой (71.12), то она дает очень низкие температуры перехода. Если подставить значение  $l = 2$ , мы получаем  $T_c \approx 2 \cdot 10^{-19} \text{ }^\circ\text{K}$ . Можно, однако, надеяться, что перенормировка  $\Phi$  для взаимодействия возбуждений связана с экранировкой взаимодействия на нескольких межатомных расстояниях, и на рассеянии возбуждений с  $l \approx 2-3$  эффект этой экранировки не сказывается. Поэтому можно попытаться произвести оценку  $T_c$  на основе газового приближения, в котором  $\text{He}^3$  рассматривают как слабо неидеальный газ Ферми. Теория дает

$$T_c \sim (\gamma/\pi) (2/l)^{1/2} \exp(-\pi/2\delta_l), \quad (71.13)$$

$\gamma$  — постоянная Эйлера,  $\delta_l$  — фаза рассеяния. Два изолированных атома взаимодействуют с энергией, описываемой интерполяционной формулой

$$V = V_0 \left[ \left( \frac{R}{r} \right)^{12} - \left( \frac{R}{r} \right)^6 \right]. \quad (71.14)$$

Численное вычисление фаз рассеяния с таким потенциалом показывает, что наибольшая фаза, имеющая знак притяжения, соответствует  $l = 2$ . При этом  $T_c \approx 8 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ\text{K}$ .

Недавно Кон и Латинжер [50] указали на существование еще одного механизма, который может привести к переходу  $\text{He}^3$  в сверхтекучее состояние. Механизм этот основан на том факте, что амплитуда рассеяния ферми-частиц во втором порядке теории возмущений при передаче импульса  $q$ , равной удвоенному фермиевскому  $p_0$ , имеет особенность вида  $(q - 2p_0) \ln|q - 2p_0|$ . Как было указано выше, особенности в амплитуде рассеяния определяют характер убывания потенциала взаимодействия частиц на больших расстояниях. Особенности  $(q - 2p_0) \times \ln|q - 2p_0|$  отвечает потенциал, убывающий по закону  $\cos(2p_0 r + \phi)/r^3$ , т. е. медленнее ван-дер-ваальсовых сил, причем из-за осцилляций имеются области, соответствующие притяжению частиц, что может привести к куперовскому спариванию в состояниях с некоторыми моментами. Подробный анализ приводит к следующему

уравнению для температуры перехода в сверхтекучее состояние:

$$\frac{(pm)^2}{2\pi^4 l^4} \{V^2(0) + 2(-1)^l [V(0)V(2p_0) - V^2(2p_0)]\} \ln \frac{\varepsilon_l}{T_c} = 1, \quad (71.15)$$

где  $V(q)$  — фурье-образ потенциала взаимодействия частиц в вакууме,  $m$  — масса атома,  $\varepsilon_l$  — энергия порядка фермиевской. Уравнение (71.15) имеет решение, когда выражение в фигурных скобках положительно, а это известно так при нечетных  $l$ , независимо от знака  $V(0)$ . Уравнение (71.15) получено по теории возмущений и, строго говоря, неприменимо к жидкому  $\text{He}^3$ , где взаимодействие атомов не является слабым. Можно однако попытаться сделать оценку температуры перехода с помощью этой формулы, считая, что взаимодействие атомов  $\text{He}^3$  описывается потенциалом  $V(r) = \frac{4\pi a}{m} \delta(r)$ , где  $a$  — диаметр твердого ядра гелиевого атома, тогда из (71.15) получаем

$$\frac{T_c^{(l)}}{\varepsilon_l} \sim e^{-2,5l^4}$$

и для  $l = 2$   $T_c^{(2)}/\varepsilon_2 \sim 10^{-17}$ .

## ТЕОРИЯ ФЕРМИ-БОЗЕ КВАНТОВЫХ ЖИДКОСТЕЙ [51]

Растворы  $\text{He}^3$  в  $\text{He}^4$  при низких температурах представляют собой пример квантовых жидкостей, в которых одновременно имеются фермиевские и бозевские возбуждения. При температурах ниже температуры вырождения для фермиевских возбуждений существенным становится взаимодействие, и фермиевская часть жидкости в этом случае образует фермиевскую квантовую жидкость, растворенную в сверхтекучей жидкости.

Диаграмма состояния растворов  $\text{He}^3$  в  $\text{He}^4$  имеет при температуре около  $0,8^\circ \text{K}$  критическую точку, ниже которой растворы расслаиваются. Кривая расслоения при  $T \rightarrow 0$  одним концом уходит в точку чистого вещества ( $\text{He}^3$ ), а другим — в точку, соответствующую раствору с концентрацией  $\text{He}^3$  в  $\text{He}^4$  около 6% [52]. При концентрации ниже 6% раствор не расслаивается, и при понижении температуры мы всегда попадаем в область фермиевского вырождения. Это подтверждается измерениями теплоемкости растворов, которая изменяется с температурой по линейному закону [53]. Таким образом, указанные растворы представляют собой своеобразную ферми-бозе квантовую жидкость.

Название ферми-бозе-жидкость мы будем применять во всех случаях, когда имеется ферми-жидкость со сверхтекучестью. Примером ферми-бозе-жидкости должен был бы быть и чистый жидкий  $\text{He}^3$  в той области температур, где в нем могла бы наступить сверхтекучесть благодаря куперовскому спариванию фермиевских возбуждений с ненулевым моментом (§ 71).

В настоящей главе мы сформулируем общую феноменологическую теорию ферми-бозе квантовых жидкостей в том духе, как это было сделано для ферми-жидкостей \*) в главе XIV.

## § 72. Энергия возбуждения

Пусть  $E'$  и  $P'$  — энергия и импульс (единицы объема) жидкости в системе отсчета, движущейся со скоростью сверхтекучего движения  $v_s$ . Тогда энергия жидкости в покоящейся системе отсчета будет равна

$$E = E' + P'v_s + \rho v_s^2/2, \quad (72.1)$$

а импульс

$$J = \rho v_s + P'. \quad (72.2)$$

Тот же импульс  $J$  можно представить в виде суммы импульса сверхтекучего движения бозе-части жидкости, равного  $\rho_1 v_s$ , и полного импульса возбуждений, равного  $\int p n_p d\tau$ :

$$J = \rho_1 v_s + \int p n_p d\tau. \quad (72.3)$$

Плотность бозе-части жидкости  $\rho_1$  равна \*\*)

$$\rho_1 = \rho - m \int n_p d\tau \quad (72.4)$$

( $m$  — масса ферми-частицы). Сравнив (72.2) и (72.3), находим

$$P' = \int (p - mv_s) n_p d\tau = \int p n_{p+mv_s} d\tau. \quad (72.5)$$

\*) При этом, естественно, никаких ограничений на величину концентрации ферми-частиц мы не делаем. Как известно, параметром разложения в ряд термодинамических функций вырожденного раствора является концентрация в степени  $1/3$ . Очевидно, что при концентрации порядка 6% этот параметр не является малым.

\*\*) Как и в теории ферми-жидкости, число фермиевских возбуждений в растворе  $\text{He}^3$  в  $\text{He}^4$  предполагается равным числу ферми-частиц.

Таким образом, импульс возбуждения выражается в форме вариационной производной

$$p = \delta P' / \delta n_{p+mv_s}. \quad (72.6)$$

Аналогично энергия возбуждения равна (в системе, где  $v_s = 0$ )

$$\varepsilon_p = \delta E' / \delta n_{p+mv_s}. \quad (72.7)$$

Состояние нашей системы описывается заданием трех функций: плотности  $\rho$  (или  $\rho_1$ ), скорости  $v_s$  и функции распределения  $n_{p+mv_s}$ . Энергия возбуждения может быть определена как вариационная производная от плотности энергии  $E$  по функции распределения при постоянных двух других функциях  $\rho$  (или  $\rho_1$ ) и  $v_s$ . Для случая раствора  $\text{He}^3$  в  $\text{He}^4$  естественной переменной является плотность  $\rho_1$ , и мы энергию возбуждения определяем как ту дополнительную энергию, которую приобретает смесь жидкостей при добавлении одного атома  $\text{He}^3$  (при заданной массе бозе-жидкости  $\text{He}^4$ ). Для случая же ферми-жидкости, в которой благодаря спариванию появляется сверхтекучесть, более естественной переменной является полная плотность  $\rho$ . В дальнейшем все вычисления будем производить вначале для случая, когда в качестве переменной выбрана плотность  $\rho$ . При этом формулы получаются более компактными. В конце же мы дадим сводку результатов для обоих случаев.

Вычислим теперь энергию возбуждения  $H_{p+mv_s}$  при наличии сверхтекучего движения со скоростью  $v_s$  (при этом, очевидно, импульс возбуждения равен  $p + mv_s$ ). Из формулы (72.1) находим

$$H_{p+mv_s} = \frac{\delta E}{\delta n_{p+mv_s}} = \varepsilon_p + pv_s. \quad (72.8)$$

Энергия  $\varepsilon_p$  является функционалом плотности возбуждений, эта зависимость может быть выражена в виде функциональной производной

$$f(p, p') = \delta \varepsilon_p / \delta n_{p+mv_s}. \quad (72.9)$$



Таким образом, при небольшом отклонении от равновесия имеем

$$\varepsilon_p = \varepsilon_p^{(0)} + \int f(p, p') \delta n_{p'+mv_s} d\tau', \quad (72.10)$$

где  $\varepsilon_p^{(0)}$  — энергия возбуждения в находящейся в равновесных условиях системе, а

$$\delta n_{p+mv_s} = n_{p+mv_s} - n_p^{(0)} \quad (72.11)$$

( $n_p^{(0)}$  — равновесная функция распределения). То, что вариация должна быть определена таким образом, следует непосредственно из формулы (72.5), которую можно переписать в виде

$$P' = \int p (n_{p+mv_s} - n_p^{(0)}) d\tau.$$

Запишем теперь энергию возбуждения  $H_p$  как функцию от импульса  $p$ . Пользуясь определением (72.8) и формулой (72.9) и выделяя в явном виде линейные по  $v_s$  члены, находим

$$H_p = \varepsilon_{p-mv_s} + (p - mv_s, v_s) \cong \varepsilon_p^{(0)} + \left( p - m \frac{\partial \varepsilon}{\partial p}, v_s \right) + \int f(p - mv_s, p') \delta n_{p'+mv_s} d\tau. \quad (72.12)$$

Для значений импульса, близких к граничному фермиевскому, отсюда получаем \*)

$$H_p = \varepsilon_p^{(0)} + \left( p - m \frac{\partial \varepsilon}{\partial p}, v_s \right) - m \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} v_s \right) \frac{F_1}{3} + \int f(p, p') (n_{p'} - n_p^{(0)}) d\tau'. \quad (72.13)$$

Энергию возбуждения  $\varepsilon_p^{(0)}$  записываем в виде

$$\varepsilon_p^{(0)} = \varepsilon_0 + p^2/2m^*, \quad (72.14)$$

\*) Мы вводим следующее обозначение:  $F(\chi) = (\partial \tau / \partial \varepsilon)_{\varepsilon=\varepsilon_p} f(\chi)$ , где  $f(\chi)$  — значение  $f(p, p')$  при  $|p| = |p'| = p_F$ , зависящее только от угла  $\chi$  между векторами  $p$  и  $p'$ . Функцию  $F$  разлагаем в ряд по полиномам Лежандра.  $F_1$  — первая сферическая гармоника.

где  $m^*$  — полная эффективная масса, обязанная взаимодействию ферми-частицы как с бозевской, так и с фермиевской частями жидкости,  $\varepsilon_0$  — нулевая энергия возбуждения. Для этого конкретного вида спектра из (72.13) следует

$$H_p = \varepsilon_0 + \frac{p^2}{2m^*} + (pv_s) \left( 1 - \frac{m}{m^*} \left( 1 + \frac{F_1}{3} \right) \right) + \int f(p, p') (n_{p'} - n_p^{(0)}) d\tau'. \quad (72.15)$$

Полученная формула отличается от аналогичной формулы, данной в работе Бардина, Бейма и Пайнса [53], как тем, что в члене  $p^2/2m$  пишется полная эффективная масса, так и коэффициентом при члене  $pv_s$ . При наличии сверхтекучего движения нельзя воспользоваться принципом Галилея для установления связи между затравочной массой (эффективной массой, которую имело бы одно фермиевское возбуждение, находящееся в сверхтекучей жидкости) и полной эффективной массой  $m^*$ , обязанной также и взаимодействию фермиевских возбуждений. Коэффициент при члене  $pv_s$  в формуле (72.15) обладает необходимым и естественным свойством: в чисто фермиевской жидкости

$$1 - \frac{m}{m^*} \left( 1 + \frac{F_1}{3} \right) = 0,$$

и сверхтекучесть отсутствует.

### § 73. Равновесная функция распределения

Равновесная функция распределения находится минимизацией энтропии

$$S = - \int \{ (1-n) \ln(1-n) + n \ln n \} d\tau \quad (73.1)$$

при заданных значениях полной энергии  $E$  числа возбуждений  $N = \int n d\tau$  и импульса относительно движения  $P'$ . Таким образом, необходимо минимизировать функционал

$$\Phi = S - \beta (E - \mu_3 N - v_n P') \quad (73.2)$$

( $\beta$ ,  $\mu_3$  и  $v_n$  — лагранжевы множители, имеющие обычный физический смысл:  $\beta = 1/T$ ,  $\mu_3$  — химический потенциал,  $v_n$  — нормальная скорость). Варьируя функционал (73.2) по  $\delta n_{p+mv_s}$ , находим

$$n_{p+mv_s}^{(0)} = [\exp\{(H_{p+mv_s} - p v_n - \mu_3)/T\} + 1]^{-1}. \quad (73.3)$$

Из (73.2) следует, что химический потенциал

$$\mu_3 = (\partial E'/\partial N)_{S, P'}, \quad (73.4)$$

а термодинамическое тождество имеет следующий вид:

$$dE' = TdS + \mu_3 dN + m_4^{-1} \mu_4 dp + (v_n - v_s, dP') \quad (73.5)$$

$m_4$  — масса атома He<sup>4</sup>).

В случае, когда вместо  $p$  независимой переменной является плотность  $\rho_1$ , тождество приобретает вид

$$dE' = Tds + \mu_3^{(1)} dN + m_4^{-1} \mu_4 d\rho_1 + (v_n - v_s, dP'), \quad (73.6)$$

$$\mu_3^{(1)} = \mu_3 + \frac{m}{m_4} \mu_4.$$

#### § 74. Нормальная плотность и теплоемкость

Вычислим импульс фермиевских возбуждений в системе отсчета, где сверхтекучая часть жидкости покоится. Имеем

$$P' = \int p n_{p+mv_s} d\tau. \quad (74.1)$$

Воспользуемся для функции распределения ее равновесным значением (73.3). Найдём добавку к энергии возбуждения при наличии сверхтекучего и нормального течений. Из (72.8) и (72.10) следует уравнение

$$\delta H = (p, v_s - v_n) + \int f(p, p') \frac{\partial n^{(0)}}{\partial \varepsilon'} \delta H' d\tau', \quad (74.2)$$

откуда получаем

$$\delta H = \frac{(p, v_s - v_n)}{1 + F_1/3}. \quad (74.3)$$

Используя эту формулу, из (74.1) находим

$$P' = \int p \frac{\partial n^0}{\partial \varepsilon} \delta H d\tau = \frac{[m^* N}{1 + F_1/3} (v_n - v_s). \quad (74.4)$$

Полный импульс жидкости равен

$$J = \rho v_s + P' = \left( \rho - \frac{m^* N}{1 + F_1/3} \right) v_s + \frac{m^* N}{1 + F_1/3} v_n. \quad (74.5)$$

Таким образом, плотность нормальной компоненты

$$\rho_n = \frac{m^* N}{1 + F_1/3}. \quad (74.6)$$

Естественно, что она не равна плотности фермиевской части жидкости  $mN$ .

Теплоемкость фермиевских возбуждений вычисляется аналогично тому, как это делается в ферми-жидкости. Она равна

$$c = \frac{C}{N} = \gamma T, \quad \gamma = \frac{\pi^2}{3N} \left( \frac{d\tau}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=\mu_3} = \left( \frac{\pi}{3N} \right)^{3/2} \frac{m^*}{\hbar^2}. \quad (74.7)$$

Коэффициент  $\gamma$  в этой формуле содержит полную эффективную массу возбуждения  $m^*$ , а не  $m^*/(1 + F_1/3)$ , как это имеет место в формуле (74.6), для  $\rho_n$ .

#### § 75. Закон сохранения импульса и энергии

Запишем кинетическое уравнение для функции  $n_{p+mv_s}$ . Имеем

$$\frac{\partial n_{p+mv_s}}{\partial t} + \frac{\partial n_{p+mv_s}}{\partial x} \frac{\partial H_{p+mv_s}}{\partial p} - \frac{\partial n_{p+mv_s}}{\partial p} \frac{\partial H_{p+mv_s}}{\partial x} = I(n). \quad (75.1)$$

Для вывода полной системы уравнений, описывающих ферми-бозе-жидкость, воспользуемся законами сохранения: уравнением непрерывности

$$\dot{\rho} + \operatorname{div} J = 0 \quad (75.2)$$

и законом сохранения импульса

$$J_i + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} = 0, \quad (75.3)$$

где  $\Pi_{ik}$  — неизвестный пока тензор потока импульса. Умножим теперь уравнение (75.1) на  $p_i$  и проинтегрируем по всему фазовому объему (для простоты операцию интегрирования обозначим чертой). При этом следует иметь в виду, что поскольку  $\int I d\tau = 0$ ,

$$\int p I d\tau = \int (p + m v_s) I d\tau = 0.$$

Таким путем находим

$$\frac{\partial P'_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( n_{p+mv_s} p_i \frac{\partial H_{p+mv_s}}{\partial p_k} \right) + \overline{n_{p+mv_s} \frac{\partial H_{p+mv_s}}{\partial x_i}} = 0. \quad (75.4)$$

Далее, вычтя из уравнения (75.3) уравнение (75.4) и воспользовавшись уравнением непрерывности, получаем

$$\begin{aligned} \rho \dot{v}_{si} - v_{si} \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho v_{sk} + \overline{n_{p+mv_s} p_k}) + \\ + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \Pi_{ik} - \overline{n_{p+mv_s} p_i \frac{\partial H_{p+mv_s}}{\partial p_k}} \right) - \overline{n_{p+mv_s} \frac{\partial H_{p+mv_s}}{\partial x_i}} = 0. \end{aligned} \quad (75.5)$$

Произведем теперь преобразование полученного уравнения, учитывающее условие  $\text{rot } v_s = 0$ . Находим

$$\begin{aligned} \rho \left( \dot{v}_{si} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{v_s^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \Pi_{ik} - \overline{\rho v_{si} v_{sk}} - \overline{n_{p+mv_s} p_i \frac{\partial H_{p+mv_s}}{\partial p_k}} \right) - \\ - v_{si} \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{n_{p+mv_s} p_k} - \overline{n_{p+mv_s} \frac{\partial H_{p+mv_s}}{\partial x_i}} = 0. \end{aligned} \quad (75.6)$$

Преобразуя последний член в (75.6), имеем

$$\begin{aligned} \overline{n_{p+mv_s} \frac{\partial H_{p+mv_s}}{\partial x_i}} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{n_{p+mv_s} H_{p+mv_s}} - \overline{H_{p+mv_s} \frac{\partial n_{p+mv_s}}{\partial x_i}} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \overline{n_{p+mv_s} H_{p+mv_s}} - \frac{\partial E}{\partial x_i} + \frac{\partial E}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \frac{\partial E}{\partial v_{sk}} \frac{\partial v_{sk}}{\partial x_i} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \overline{n_{p+mv_s} H_{p+mv_s}} - E + \frac{\partial E}{\partial \rho} \rho \right) - \\ &- \rho \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial E}{\partial \rho} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( v_{si} \frac{\partial E}{\partial v_{sk}} \right) - v_{si} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial E}{\partial v_{sk}} = 0. \end{aligned} \quad (75.7)$$

Подставив последнее выражение в (75.6) и учтя соотношение

$$\frac{\partial E}{\partial v_{sk}} = \rho v_{sk} + \overline{n_{p+mv_s} p_k}, \quad (75.8)$$

получаем

$$\begin{aligned} \rho \left( \dot{v}_{si} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial E}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \Pi_{ik} - \overline{n_{p+mv_s} p_i \frac{\partial H_{p+mv_s}}{\partial p_k}} \right) - \\ - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( v_{si} \frac{\partial E}{\partial v_{sk}} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \overline{n_{p+mv_s} H_{p+mv_s}} - E + \rho \frac{\partial E}{\partial \rho} \right) = 0. \end{aligned} \quad (75.9)$$

Из (75.9) находим уравнение сверхтекучего движения и выражение для тензора потока импульса:

$$\dot{v}_s + \nabla (\partial E / \partial \rho)_n, v_s = 0, \quad (75.10)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{ik} = \overline{n_{p+mv_s} p_i \frac{\partial E}{\partial p_k}} + \overline{n_{p+mv_s} (p_i v_{sk} + p_k v_{si})} + \rho v_{si} v_{sk} + \\ + \delta_{ik} \left( \overline{n_{p+mv_s} e_p} - E' + \rho \frac{\partial E'}{\partial \rho} \right). \end{aligned} \quad (75.11)$$

С учетом (72.1) уравнение сверхтекучего движения (75.10) можно переписать в следующем виде:

$$\dot{v}_s + \nabla \left( \frac{\partial E'}{\partial \rho} + \frac{v_s^2}{2} \right) = 0. \quad (75.12)$$

Определим давление обычным соотношением

$$P = -E' + \frac{\partial E'}{\partial \rho} \rho + TS. \quad (75.13)$$

С учетом этого определения запишем выражение для тензора потока импульса:

$$\begin{aligned} \Pi_{ik} = \overline{n_{p+mv_s} p_i \frac{\partial E}{\partial p_k}} + \overline{n_{p+mv_s} (p_i v_{sk} + p_k v_{si})} + \rho v_{si} v_{sk} + \\ + \delta_{ik} \left( \overline{n_{p+mv_s} e_p} - TS + P \right). \end{aligned} \quad (75.14)$$

Для получения закона сохранения энергии умножим кинетическое уравнение (75.1) на  $H_{p+mv_s}$  и проинтегрируем

по фазовому объему. В результате

$$H_{\mathbf{p}+m\mathbf{v}_s} \frac{\partial n_{\mathbf{p}+m\mathbf{v}_s}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left( n_{\mathbf{p}+m\mathbf{v}_s} H_{\mathbf{p}+m\mathbf{v}_s} \frac{\partial H_{\mathbf{p}+m\mathbf{v}_s}}{\partial p_k} \right) = 0. \quad (75.15)$$

Вычислим производную от полной энергии по времени

$$\frac{\partial E}{\partial t} = H_{\mathbf{p}+m\mathbf{v}_s} \frac{\partial n_{\mathbf{p}+m\mathbf{v}_s}}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial v_{sk}} \frac{\partial v_{sk}}{\partial t} \quad (75.16)$$

и воспользуемся уравнением (75.15), уравнением непрерывности (75.2) и уравнением сверхтекучего движения (75.10). Таким путем находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} &= - \frac{\partial}{\partial x_k} \left( n_{\mathbf{p}+m\mathbf{v}_s} H_{\mathbf{p}+m\mathbf{v}_s} \frac{\partial H_{\mathbf{p}+m\mathbf{v}_s}}{\partial p_k} \right) - \\ &\quad - \frac{\partial E}{\partial \rho} \operatorname{div} \mathbf{J} - \mathbf{J} \operatorname{grad} \frac{\partial E}{\partial \rho} = \\ &= - \operatorname{div} \left\{ n_{\mathbf{p}+m\mathbf{v}_s} H_{\mathbf{p}+m\mathbf{v}_s} \frac{\partial H_{\mathbf{p}+m\mathbf{v}_s}}{\partial \mathbf{p}} + \mathbf{J} \frac{\partial E}{\partial \rho} \right\}. \end{aligned} \quad (75.17)$$

Выражение, стоящее под знаком  $\operatorname{div}$ , и есть поток энергии

$$\mathbf{Q} = \mathbf{J} \frac{\partial E}{\partial \rho} + n_{\mathbf{p}+m\mathbf{v}_s} H_{\mathbf{p}+m\mathbf{v}_s} \frac{\partial H_{\mathbf{p}+m\mathbf{v}_s}}{\partial \mathbf{p}}. \quad (75.18)$$

## § 76. Первый и второй звуки

Рассмотрим звуковые колебания ферми-бозе-жидкости низкой частоты. В этом предельном случае имеет место гидродинамика как для всей жидкости в целом, так и для фермиевской части. Однако для сохранения единообразия мы по-прежнему будем пользоваться кинетическим уравнением для фермиевских возбуждений. Обозначим малые отклонения  $n_{\mathbf{p}+m\mathbf{v}_s}$ ,  $\rho$  от равновесных значений соответственно через  $n_1 = n_{\mathbf{p}+m\mathbf{v}_s} - n_{\mathbf{p}}^{(0)}$ ,  $\rho' = \rho - \rho_0$ ; того же порядка малости будет и сама скорость  $\mathbf{v}_s$ . Пусть все эти величины изменяются со временем и координатой по периоди-

ческому закону  $\exp(i\omega t - ikx)$ . Тогда уравнения (75.1), (75.2) и (75.10) дадут в линейном приближении следующую систему:

$$i(\omega - kv)n_1 + ikv \frac{\partial n^{(0)}}{\partial \varepsilon} \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \rho' + p v_s + \int f(p, p') n_1' d\tau \right) = I(n), \quad (76.1)$$

$$i\omega \rho' - ik \left( p v_s + \int n_1 p d\tau \right) = 0, \quad (76.2)$$

$$i\omega v_s - ik \left( \frac{s^2}{\rho} \rho' + \int \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} n_1 d\tau \right) = 0; \quad v = \frac{\partial \varepsilon}{\partial p}, \quad \frac{s^2}{\rho} = \frac{\partial^2 E}{\partial p^2}. \quad (76.3)$$

Далее введем следующие обозначения и безразмерные переменные:

$$n_1 = \frac{\partial n^{(0)}}{\partial \varepsilon} m^* v_F^2 v(x), \quad x = \cos \theta,$$

$$F(x) = f(x) \left( \frac{d\tau}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=\mu_s} = \sum F_n P_n(\cos x),$$

$\theta$  — угол, образованный импульсом возбуждения  $p$  и волновым вектором  $k$ , определение  $f(x)$  дано в сноске на стр. 296

$$v_F = \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right)_{\varepsilon=\mu_s}, \quad \alpha = \left( \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right)_{\varepsilon=\mu_s} \frac{\rho}{m^* s^2},$$

$$u = \frac{\omega}{kv_F}, \quad \tilde{\rho}' = \frac{\rho'}{\rho}, \quad \tilde{v}_s = \frac{v_s}{v_F}.$$

В новых переменных система уравнений (76.1) — (76.3) приобретает следующий вид:

$$(u - x) v(x) + x (\tilde{\alpha} \rho' - \overline{F(x) v(x')} + x \tilde{v}_s) = I(v), \quad (76.4)$$

$$i\tilde{\rho}' - \tilde{v}_s + v_1 \frac{Nm^*}{\rho} = 0, \quad (76.5)$$

$$i\tilde{v}_s - \frac{s^2}{v_F^2} \tilde{\rho}' + 3\alpha \frac{Nm^*}{\rho} \frac{s^2}{v_F^2} v_0 = 0. \quad (76.6)$$

Функция  $v(x)$  разлагается в ряд по полиномам Лежандра

$$v(x) = \sum v_n P_n(x), \quad (76.7)$$

$v_0$  и  $v_1$  в уравнениях (76.4) — (76.6) — соответственно нулевая и первая гармоники.

Полученная система уравнений, очевидно, справедлива для любых значений частот. Для малых значений  $\omega$ , когда характерное время соударения  $\tau$  удовлетворяет условию  $\omega\tau \ll 1$ , как уже указывалось, имеет место гидродинамика. В этом случае из всех гармоник функции  $v(x)$  отличны от нуля только нулевая и первая (вторая и высшие гармоники имеют относительный порядок  $\omega\tau$  или выше). Приравняв коэффициенты при  $P_0(x)$  и  $P_1(x)$  в уравнении (76.4), получим два уравнения для  $v_0$  и  $v_1$ :

$$uv_0 - \frac{1}{3}(1 + F_1/3)v_1 + \frac{1}{3}\tilde{v}_3 = 0, \quad (76.8)$$

$$-(1 + F_0)v_0 + uv_1 + \alpha \frac{s^2}{v_F^2} \tilde{\rho}' = 0. \quad (76.9)$$

Условие совместности системы уравнений (76.5), (76.6), (76.8) и (76.9) дает нам следующее дисперсионное уравнение, определяющее  $u$ :

$$u^4 - u^2 \left\{ \frac{s^2}{v_F^2} \left[ 1 + \frac{Nm^*}{\rho(1+F_1/3)} \left( \left( \alpha \left( 1 + \frac{F_1}{3} \right) + 1 \right)^2 - 1 \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{F_1}{3} \right) (1 + \tilde{F}_0) \right\} + \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{F_1}{3} \right) (1 + \tilde{F}_0) \frac{s^2}{v_F^2} \times \\ \times \left( 1 - \frac{Nm^*}{\rho(1+F_1/3)} \right) = 0, \quad (76.10)$$

где

$$\tilde{F}_0 = F_0 - 3x^2 \frac{s^2}{v_F^2} \frac{Nm^*}{\rho}. \quad (76.11)$$

Для случая малых концентраций ферми-частиц уравнение (76.10) имеет следующие два приближенных корня:

$$u_1^2 = \frac{s^2}{v_F^2} \left\{ 1 + \frac{Nm^*}{\rho(1+F_1/3)} \left[ \left( \alpha \left( 1 + \frac{F_1}{3} \right) + 1 \right)^2 - 1 \right] \right\}, \quad (76.12)$$

$$u_2^2 = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{F_1}{3} \right) (1 + \tilde{F}_0) \left[ 1 - \frac{Nm^*}{\rho(1+F_1/3)} \left( \alpha \left( 1 + \frac{F_1}{3} \right) + 1 \right)^2 \right]. \quad (76.13)$$

Формула (76.12) определяет скорость обычного (первого) звука, а формула (76.13) — скорость второго звука. Второй звук в ферми-бозе-жидкости представляет собой звук, распространяющийся по фермиевской части жидкости. Формула (76.13) в первом приближении совпадает с формулой, определяющей скорость звука в ферми-жидкости. Единственное отличие — вместо  $F_0$  входит перенормированная за счет фононного взаимодействия гармоника  $\tilde{F}_0$  (формула (76.11)).

Для случая малых концентраций фермиевской компоненты более удобно выражать результаты не через переменные  $\rho$  и  $N$ , а через переменные  $\rho_1$  и  $N$ . Несколько позже мы запишем эти результаты в этих более удобных переменных.

## § 77. Нуль-звук

Рассмотрим теперь предельный случай больших частот звука, удовлетворяющих условию  $\omega\tau \gg 1$ . В этом случае в кинетическом уравнении можно пренебречь интегралом столкновений. Для решения кинетического уравнения разлагаем функцию распределения в ряд по полиномам Лежандра. Для простоты будем предполагать отличными от нуля только первые две сферические гармоники функции  $F(F_0$  и  $F_1)$ . Тогда кинетическое уравнение (76.4) дает два уравнения для первых двух гармоник функции  $v(v_0$  и  $v_1)$ :

$$(1 - F_0 w) v_0 - \frac{1}{3} F_1 u w v_1 + \frac{s^2}{v_F^2} \alpha \tilde{w} \rho' + u w \tilde{v}_3 = 0, \quad (77.1)$$

$$- F_0 u w v_0 + \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{F_1}{3} - F_1 u^2 w \right) v_1 + \\ + \frac{s^2}{v_F^2} \alpha \tilde{w} \rho' - \left( \frac{1}{3} - u^2 w \right) \tilde{v}_3 = 0, \quad (77.2)$$

где

$$w = -1 + \frac{u}{2} \ln \frac{u+1}{u-1}. \quad (77.3)$$

Условие совместности уравнений (77.1), (77.2), (76.5) и (76.6) дает дисперсионное уравнение в области больших частот. Поскольку  $F_0$  и  $F_1$  для раствора невелики, имеется

корень дисперсионного уравнения порядка единицы. Вблизи этого корня дисперсионное уравнение имеет следующий вид:

$$1 - \left( \tilde{F}_0 + \frac{\tilde{F}_1 u^2}{1 + F_1/3} \right) w = 0, \quad (77.4)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{F}_0 &= F_0 - \frac{3Nm^*}{\rho} \alpha^2 \frac{s^2}{v_F^2}, \\ \tilde{F}_1 &= F_1 - \frac{Nm^*}{\rho} (\alpha + 1). \end{aligned} \quad (77.5)$$

Мы удерживаем здесь в  $F_1$ , кроме основного, и члены более высокого порядка по  $Nm^*/\rho$ , так как по оценкам создается впечатление, что они дают заметный вклад в случае растворов  $\text{He}^3$  в  $\text{He}^4$ .

Уравнение (77.4) определяет скорость нулевого звука в растворе, оно имеет незатухающие решения только в том случае, когда

$$\tilde{F}_0 + \frac{\tilde{F}_1 u^2}{1 + F_1/3} > 0. \quad (77.6)$$

Что касается  $\tilde{F}_0$ , то эта величина отрицательна и порядка единицы (по абсолютной величине). Второй член оценить труднее, при  $u^2 \sim 1$ , по-видимому, он меньше единицы \*). В этом случае нуль-звуковых решений дисперсионное уравнение не имеет. Однако поскольку величина  $F_1$  плохо известна, вопрос о существовании нуль-звука в растворе остается открытым (обратим внимание на то, что второй член в  $\tilde{F}_1$ , к сожалению, отрицателен, что также неблагоприятно).

## § 78. Два определения энергии возбуждения

Запишем теперь некоторые соотношения, связывающие параметры теории для двух разных наборов переменных. До сих пор мы пользовались следующим набором:

\*) Если  $u^2 \gg 1$ , то  $w = 1/3u^2$ , и уравнение (77.4) могло бы иметь решение лишь при очень больших значениях  $F_1$ , для чего, по-видимому, нет никаких оснований.

$\rho$ ,  $v_s$  и  $\delta n_{p+m v_s} = n_{p+m v_s} - n_p^{(0)}$ . Возьмем теперь другой набор: плотность бозевской компоненты  $\rho_1 = \rho - m \int n d\tau$ , скорость  $v_s$  и определим энергию возбуждения как вариационную производную от энергии  $E$  по  $\delta n_p = n_p - n_p^{(0)}$ , при заданных значениях  $\rho_1$  и  $v_s$ . Имеем

$$H_p = \delta E / \delta n_p. \quad (78.1)$$

Будем отмечать индексом 1 все производные, вычисленные при постоянном значении  $\rho_1$ . Таким образом, для энергии возбуждения имеем следующую связь:

$$H_p = \left( \frac{\delta E}{\delta n_p} \right)_\rho = \left( \frac{\delta E}{\delta n_p} \right)_{\rho_1} - m \frac{\partial E}{\partial \rho_1} = H_p^{(1)} - m \frac{\partial E}{\partial \rho_1}. \quad (78.2)$$

Появление второго члена в (78.2) означает изменение отсчета энергии. Физический смысл его понятен, добавления возбуждения при заданной общей плотности  $\rho$  и при заданной плотности бозевской части  $\rho_1$  неэквивалентны. Этот член равен химическому потенциалу бозевской части, умноженному на массу ферми-частицы:

$$m \frac{\partial E}{\partial \rho_1} = m \frac{\mu_4}{m_4}.$$

Химические потенциалы  $\mu_3$  и  $\mu_3^{(1)}$  связаны соотношением

$$\mu_3 = \mu_3^{(1)} - \frac{m}{m'} \mu_4. \quad (78.3)$$

Таким образом, для разностей  $H_p - \mu_3$  имеем связь

$$H_p - \mu_3 = H_p^{(1)} - \mu_3^{(1)}, \quad (78.4)$$

т. е. энергия возбуждения, отсчитанная от химического потенциала, инвариантна. Далее, вычислим функцию  $f(p, p')$ . Из (78.2) находим

$$\begin{aligned} f(p, p') &= \frac{\delta H_{p-m v_s}}{\delta n_{p'+m v_s}} = \frac{\delta \varepsilon_p^{(1)}}{\delta n_{p'+m v_s}} - 2m \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \rho_1} + m^2 \frac{\partial^2 E}{\partial \rho_1^2} = \\ &= f^{(1)}(p, p') - 2m \frac{\partial \varepsilon_p^{(1)}}{\partial \rho_1} + m^2 \frac{\partial^2 E}{\partial \rho_1^2}. \end{aligned} \quad (78.5)$$

Введем обозначения

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \rho_1^2} = \frac{\partial}{\partial \rho_1} \frac{\mu_4}{m_4} = \frac{s_1^2}{\rho_1}, \quad \alpha_1 = \frac{\rho_1}{m^* s_1^2} \left( \frac{\partial \varepsilon^{(1)}}{\partial \rho_1} \right)_{\varepsilon^{(1)} = \mu_3^{(1)}}. \quad (78.6)$$

Соотношение (78.3) для граничных фермиевских энергий дает

$$F = F^{(1)} + \frac{3Nm^*}{\rho_1} \frac{s_1^2}{v_F^2} \left( -2\alpha_1 + \frac{m}{m^*} \right). \quad (78.7)$$

Связь параметров  $\alpha$  и  $\alpha^{(1)}$  также легко находится:

$$\alpha = \frac{\rho}{m^* s^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} = \frac{\rho}{m^* s^2} \left( \frac{\partial \varepsilon^{(1)}}{\partial \rho_1} - m \frac{\partial^2 E}{\partial \rho_1^2} \right) = \frac{\rho s_1^2}{\rho_1 s^2} \left( \alpha_1 - \frac{m}{m^*} \right). \quad (78.8)$$

Для величины  $\tilde{F}_0$  имеем

$$\begin{aligned} \tilde{F}_0 = F_0 - 3\alpha^2 \frac{s^2}{v_F^2} \frac{Nm^*}{\rho} = F_0^{(1)} + \\ + \frac{3Nm^*}{\rho_1} \frac{s_1^2}{v_F^2} \left[ \frac{m}{m^*} \left( -2\alpha_1 + \frac{m}{m^*} \right) - \frac{\rho_1 s^2}{\rho_1 s_1^2} \left( \alpha - \frac{m}{m^*} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

или, поскольку  $\partial^2 E / \partial \rho_1^2 = \partial^2 E / \partial \rho^2$ , то  $s^2 / \rho = s_1^2 / \rho_1$  и

$$\tilde{F}_0 = F_0^{(1)} - \frac{3Nm^*}{\rho_1} \frac{s_1^2}{v_F^2} \alpha_1^2 = \tilde{F}_0^{(1)}. \quad (78.9)$$

Выразим скорость звука в слабом растворе через ее значение для чистого растворителя:

$$s_1^2 = \rho_1 \frac{\partial}{\partial \rho_1} \frac{\mu_4}{m_4} = s_{10}^2 + \rho_1 \frac{\partial}{\partial \rho_1} \frac{\delta \mu_4}{m_4}.$$

Величина  $\delta \mu_4$  находится из простого соотношения

$$\frac{1}{m_4} \delta \mu_4 = \frac{1}{m_4} \frac{\delta \mu_4}{\partial N} N = \frac{\partial \mu_3^{(1)}}{\partial \rho_1} N = \alpha_1 \frac{m^* s_1^2}{\rho_1} N. \quad (78.10)$$

Таким образом, находим искомую формулу

$$s_1^2 \cong s_{10}^2 \left( 1 + \beta \frac{Nm^*}{\rho_1} \right), \quad \beta = \frac{\rho_1^2}{m^* s_{10}^2} \left( \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho_1^2} \right)_{\varepsilon = \mu_3^{(1)}}. \quad (78.11)$$

Аналогично для  $s^2$  находим

$$s^2 = \frac{\rho}{\rho_1} s_1^2 = s_{10}^2 \left[ 1 + \left( \beta + \frac{m}{m^*} \right) \frac{Nm^*}{\rho_1} \right]. \quad (78.12)$$

В новых переменных выражения для скоростей соответственно первого и второго звуков имеют следующий вид \*):

$$u_1^2 = \frac{s_{10}^2}{v_F^2} \left\{ 1 + \frac{Nm^*}{\rho_1 (1 + F_1/3)} \left[ \left( \alpha_1 \left( 1 + \frac{F_1}{3} \right) + \frac{\delta m}{m^*} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \beta \left( 1 + \frac{F_1}{3} \right) - \frac{\delta m}{m^*} \right] \right\}, \quad (78.13)$$

$$u_2^2 = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{F_1}{3} \right) (1 + \tilde{F}_0) \left[ 1 - \frac{Nm^*}{\rho_1 (1 + F_1/3)} \times \right. \\ \left. \times \left( \alpha_1 \left( 1 + \frac{F_1}{3} \right) + \frac{\delta m}{m^*} \right)^2 \right], \quad (78.14)$$

$$\frac{\delta m}{m^*} = 1 - \frac{m}{m^*} \left( 1 + \frac{F_1}{3} \right).$$

Вычислим теперь  $\tilde{F}_0 = \tilde{F}_0^{(1)}$ . Легко видеть, что в отличие от функции  $F_0^{(1)}$ , выражающейся через частную производную  $\partial \mu_3^{(1)} / \partial N$  при постоянной плотности  $\rho_1$ ,  $\tilde{F}_0$  определяется производной  $\partial \mu_3^{(1)} / \partial N$  в состоянии равновесия, т. е. при постоянной функции  $\mu_4$ . Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \tilde{F}_0 = \tilde{F}_0^{(1)} = \left( \frac{\partial \tau}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon = \mu_3^{(1)}} \left[ \frac{\partial \mu_3^{(1)}}{\partial N} + \frac{\partial \mu_3^{(1)}}{\partial \rho_1} \left( \frac{\partial \rho_1}{\partial N} \right)_{\mu_4} \right] = \\ = F_0^{(1)} - \frac{3Nm^*}{\rho_1} \alpha_1^2 \frac{s_1^2}{v_F^2}, \quad (78.15) \end{aligned}$$

\*) Результат (78.13) немного отличается от результата Бейма [55]. При сравнении необходимо учесть, что  $m$  в [55] определяется соотношением  $m = m^* (1 + F_1/3)$ .

что в точности совпадает с определением  $\tilde{F}_0^{(1)}$  (78.9). При выводе учтено, что согласно (78.6)

$$\left(\frac{\partial \rho_1}{\partial N}\right)_{\mu_4} = - \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_1}\right)_{\varepsilon=\mu_3^{(1)}} \frac{\rho_1}{s_1^2}. \quad (78.16)$$

Используя идентичность свойств атомов изотопов, удастся вычислить величину  $\tilde{F}_0$ , а следовательно, и  $\tilde{F}_0^{(1)}$ .

Благодаря одинаковости электронных оболочек взаимодействие атомов изотопов  $\text{He}^3$  и  $\text{He}^4$  можно с хорошей точностью считать не зависящим от массы изотопов.

Гамильтониан системы записываем в виде суммы кинетической и потенциальной энергий и учитываем в кинетической энергии разность масс изотопов, имеем

$$H = \sum_{i=1}^{N+N_4} \frac{p_i^2}{2m_4} + \sum_{i \neq k} U_{ik} + \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{6m_4}. \quad (78.17)$$

Здесь  $U_{ik}$  — энергия взаимодействия атомов,  $m_4$  — масса атома  $\text{He}^4$ ,  $N$  — число атомов  $\text{He}^3$ ,  $N_4$  — число атомов  $\text{He}^4$ .

Энергия рассматриваемой системы равна среднему значению гамильтониана

$$E = \langle H \rangle = E_0(N + N_4) + NE_1(N + N_4), \quad (78.18)$$

где

$$E_1(N + N_4) = \left\langle \frac{p_i^2}{6m_4} \right\rangle. \quad (78.19)$$

Воспользовавшись полученной формулой (78.18), находим химические потенциалы

$$\mu_4 = E'_0 + NE'_1, \quad (78.20)$$

$$\mu_3^{(1)} = E'_0 + NE'_1 + E_1 \quad (78.21)$$

(штрихом обозначаем дифференцирование по аргументу).

Теперь легко вычисляем  $\tilde{F}_0$ :

$$\begin{aligned} \tilde{F}_0 &= \left(\frac{\partial \tau}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=\mu_3} \left(\frac{\partial \mu_3}{\partial N}\right)_{\mu_4} = - \frac{E_1'^2}{E_0''} \left(\frac{\partial \tau}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=\mu_3} = \\ &= - \left(\frac{\partial \tau}{\partial \varepsilon}\right)_{\varepsilon=\mu_4} \left[ \frac{\partial (\mu_3^{(1)} - \mu_4)}{\partial N_4} \right]^2 / \left(\frac{\partial \mu_4}{\partial N_4}\right) = \\ &= - \frac{3N}{N_4} \frac{m_4}{m^*} \frac{s_1^2}{v_F^2} \left(\frac{V_3}{V_4} - 1\right)^2, \end{aligned} \quad (78.22)$$

где  $V_3$  и  $V_4$  — удельные объемы, приходящиеся на один атом, соответственно  $\text{He}^3$  и  $\text{He}^4$ . Поскольку

$$\frac{m^*}{m_4} \alpha_1 = \frac{\partial \mu_3}{\partial \rho_1} \frac{\rho_1}{m_4 s_1^2} = \frac{\partial \mu_3}{\partial \rho_1} / \frac{\partial \mu_4}{\partial \rho_1} = \frac{V_3}{V_4}, \quad (78.23)$$

то формулу (78.22) можно переписать в следующем окончательном виде:

$$\tilde{F}_0 = - \frac{3Nm^*}{\rho_1} \frac{s_1^2}{v_F^2} \left(\alpha_1 - \frac{m_4}{m^*}\right)^2. \quad (78.24)$$

Сравнив (78.24) с (78.15), находим также и выражение для  $F_0^{(1)}$

$$F_0^{(1)} = \frac{3Nm_4}{\rho_1} \frac{s_1^2}{v_F^2} \left(2\alpha_1 - \frac{m_4}{m^*}\right). \quad (78.25)$$

Формула (78.15) дает для  $\tilde{F}_0 \left(\frac{V_3}{V_4} = 1,28\right)$  следующее численное значение:

$$\tilde{F}_0 = -1,15 \text{ c}^{\text{в}}. \quad (78.26)$$

При концентрации  $c$ , равной 6%,  $\tilde{F}_0 = -0,45$ . Неравенство  $1 + \tilde{F}_0 > 0$  является условием устойчивости ферми-системы относительно флуктуаций плотности возбуждений [56]. Нарушение этого неравенства привело бы к бесконечному возрастанию флуктуаций плотности возбуждений.



Действительно, из (78.13) следует, что при  $1 + \tilde{F}_0 < 0$  скорость второго звука становится мнимой, т. е. малые отклонения плотности возбуджений могли бы бесконечно возрастать.

### § 79. Замечание об учете спина

До сих пор температура предполагалась равной нулю или столь низкой, что вкладом элементарных возбуджений бозевского типа, таких, как фононы и ротоны, можно было пренебречь. В системе типа раствора  $\text{He}^3$  в  $\text{He}^4$  при температурах ниже температуры вырождения, т. е. в области, где модель ферми-жидкости имеет место, вклад фононов во все термодинамические величины пренебрежимо мал. Так, нормальная плотность фононов при  $0,4^\circ \text{K}$  меньше  $10^{-8}$  плотности гелия. В общем же случае при наличии различных типов возбуджений как фермиевского, так и бозевского типа необходимо во всех формулах, содержащих интегрирование по фазовому объему возбуджений, производить также и суммирование по всем типам возбуджений.

До сих пор также ничего не говорилось о спине фермиевских возбуджений, так как в этом не было никакой необходимости. Учет спина может быть произведен таким же путем, как это делается в теории ферми-жидкости. Всюду вместо интегралов типа  $\int d\tau$  необходимо писать  $\frac{1}{2} \text{Sp}_\sigma \int d\tau$  (для случая спина  $1/2$ ); кроме того, необходимо учитывать тот факт, что функция  $f_{\sigma\sigma'}(\mathbf{p}, \mathbf{p})$  зависит также и от спинов  $\sigma$  и  $\sigma'$ .

## ДВИЖЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЗАРЯДОВ В ЖИДКОМ ГЕЛИИ

### § 80. Структура носителей электрических зарядов

Движение электрических зарядов в жидком гелии характеризуется рядом необычных свойств. Оказывается, что эффективные массы, связанные как с положительными, так и с отрицательными зарядами, во много раз превосходят массу атома гелия. Это тем более удивительно, что, на первый взгляд, благодаря малой плотности и поляризуемости жидкого гелия электроны могли бы свободно перемещаться в нем. При этом можно было бы ожидать, что по крайней мере эффективная масса отрицательных зарядов будет порядка массы электронов. Однако многочисленные эксперименты опровергают такой вывод и большие эффективные массы зарядов (порядка  $100 m_{\text{He}^4}$ ) указывают на макроскопический характер тех образований, которые связаны с зарядами.

Объяснение структуры носителей положительных зарядов принадлежит К. Аткинсу [56]. Идея объяснения состоит в том, что положительный заряд — «дырка» фиксируется в ионе  $\text{He}^4$  (или молекулярном ионе типа  $\text{He}_2^+$ ), электрическое поле которого создает вокруг себя область повышенного давления, достаточного для кристаллизации небольшой области вокруг иона. Таким образом, носитель положительного заряда представляет собой небольшое кристаллическое образование, как показывают оценки, включающее примерно 100 атомов  $\text{He}^4$ .

Рассмотрим количественную сторону этой модели несколько подробнее.

Электрическое поле точечного заряда  $\mathcal{E} = \frac{e}{r^2}$  вызывает поляризацию среды  $P = Na\mathcal{E}$ . Поляризуемость  $Na/v$  жидкого гелия равна  $4,55 \cdot 10^{-3}$  ( $v$  — удельный объем). Из условия постоянства химического потенциала

$$d\mu = vdp - \mathcal{E}dP \quad (80.1)$$

следует, что давление вблизи заряда изменяется по закону

$$p \approx \frac{Ne^2\alpha}{2v} \frac{1}{r^4}. \quad (80.2)$$

Как известно, при  $p = 25$  атм жидкий гелий затвердевает. Поэтому внутри сферы радиуса  $r_t = 7 \text{ \AA}$  вокруг заряда согласно (80.2) гелий будет находиться в кристаллическом состоянии. Эффективная масса носителя положительного заряда складывается из массы твердого ядра

$$M_t = \frac{4\pi r_t^3}{3} \rho_t = 32 m_{\text{He}}, \quad (80.3)$$

массы, обязанной избыточной плотности жидкости  $\delta\rho_{\text{ж}} = \frac{p}{c^2}$ ,

$$M_{\text{ж}} = 4\pi \int_{r_t}^{\infty} \delta\rho_{\text{ж}} r^2 dr = 28 m_{\text{He}} \quad (80.4)$$

и присоединенной массы

$$M_{\text{ж}}^* = \frac{2\pi}{3} r_t^3 \rho_{\text{ж}} = 15 m_{\text{He}}. \quad (80.5)$$

Таким образом, полная эффективная масса равна  $75 m_{\text{He}}$ . Специфика жидкого гелия сказывается в описанной модели в том, что благодаря низкому давлению затвердевания даже малой поляризуемости достаточно для образования макроскопических областей твердого гелия вокруг положительного иона.

Однако эту модель нельзя применить для отрицательных зарядов. Взаимодействие электрона с атомами на интересующих нас расстояниях имеет отталкивательный характер. Не существует образований типа иона  $\text{He}^-$ ,

которые могли бы локализовать электрон в малой области и привести к образованию твердой оболочки вокруг него.

Каррери с сотрудниками [58] показал экспериментально, что структура носителей отрицательных зарядов отличается от структуры носителей положительных зарядов. Они предположили, что электрон в жидком гелии расположен в центре некоторой сферической полости макроскопических размеров. Измерение потенциала отталкивания, препятствующего проникновению электрона в жидкий гелий, дает для потенциального барьера значение примерно  $U_0 = 1,02 \pm 0,08$  эв.

Таким образом, проникновение электронов в жидкий гелий энергетически не выгодно. Меньшей энергией должно обладать образование из электрона, находящегося в сферической полости (потенциальной яме), стенки которой являются для электрона барьером высотой  $U_0$ . При самых малых значениях радиуса ямы (будем считать ее прямоугольной) наименьшая энергия электрона равна  $U_0$ . При увеличении радиуса до  $a_{\text{кр}} = \sqrt{\pi \hbar^2 / 8mU_0}$  появляется уровень, энергия которого затем убывает при росте радиуса, асимптотически по закону  $\pi^2 \hbar^2 / 2ma^2$ , где  $m$  — масса электрона. Полная энергия системы будет включать в себя также затраты энергии на образование поверхности раздела  $E_{\text{пов}} = 4\pi a^2 \sigma$ , где  $\sigma = 0,145$  дин/см<sup>2</sup> — поверхностное натяжение гелия. Суммарная энергия будет обладать минимумом, определяющим размеры сферы  $a_0$ . Численный расчет для прямоугольной ямы дает  $a_0 = 17,4 \text{ \AA}$  и энергию в минимуме  $E = 0,12$  эв \*).

Эффективная масса пузырька равна, очевидно, присоединенной массе жидкости

$$M^* = \frac{2\pi}{3} \rho_{\text{ж}} a_0^3 = 245 m_{\text{He}}. \quad (80.6)$$

## § 81. Подвижности носителей тока

Для описанных моделей положительных и отрицательных носителей тока можно рассчитать их подвижность.

\*) Асимптотическое выражение для энергии уровня дает значение  $a_0 = 19,2 \text{ \AA}$ , близкое к полученному численным расчетом.

При температурах, близких к  $T = T_\lambda$ , имеет место гидродинамика (длина свободного пробега возбуждений мала по сравнению с размерами носителей заряда), и подвижность носителей можно вычислить по формуле Стокса для сопротивления обтеканию вязкой жидкостью твердого шара (для положительных зарядов)

$$F = 6\pi\eta a_+ v \quad (81.1)$$

и по формуле Рыбчинского — Адамара для обтекания пустой полости (отрицательные заряды)

$$F = 4\pi\eta a_- v. \quad (81.2)$$

Здесь  $\eta$  — коэффициент вязкости жидкого гелия. При понижении температуры от  $T = T_\lambda$  мы быстро попадаем в область, где длина свободного пробега возбуждений (фононов и ротонов) будет больше размеров носителей заряда (кнудсеновский случай). Силу, с которой действует на шар газ движущихся со скоростью  $v$  возбуждений в системе покоя шара, можно найти, вычислив импульс, передаваемый шару в единицу времени.

На элемент поверхности шара  $a^2 d\Omega$  падает поток

$$\left( v \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right) n d\tau_p; \quad (81.3)$$

здесь  $v$  — единичный вектор нормали к поверхности,  $n$  — функция распределения возбуждений. При упругом соударении передается импульс

$$\delta p = 2v(vp). \quad (81.4)$$

Таким образом, искомая сила равна

$$F = a^2 \iint d\Omega d\tau_p 2v(vp) \left( v \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right) n. \quad (81.5)$$

Для каждого заданного значения  $v$  интегрирование по  $d\tau_p$  должно вестись по полусфере, из которой частицы могут достичь заданного элемента поверхности. Удобно расширить пределы интегрирования на всю сферу

$$F = a^2 \iint d\Omega d\tau_p \left| v \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right| v(vp) n, \quad (81.6)$$

проинтегрировать сначала по  $d\Omega$  и выделить линейный по скорости  $v$  член в разложении  $n$  ( $\varepsilon - pv$ )

$$F = \pi a^2 \int \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} n p (pv) d\tau_p. \quad (81.7)$$

Интегрируя один раз по частям, получаем

$$F = e\mathcal{E} = \frac{4\pi a^2}{3} v \int n p d\tau_p \quad (81.8)$$

( $\mathcal{E}$  — внешнее электрическое поле).

Интегрирование в (81.8) по фононной и ротоновой частям дает

$$e\mathcal{E} = v \frac{4\pi a^2}{3} \left( \frac{E_{ph}}{c} + p_0 N_r \right), \quad (81.9)$$

где  $p_0$  — импульс ротона,  $N_r$  — число ротонов в единице объема,  $E_{ph}$  — плотность энергии фононов. Неупругость соударений можно учесть, введя коэффициент аккомодации.

Формулы (81.1), (81.2) и (81.9) позволяют вычислить подвижность зарядов в жидком гелии. Они удовлетворительно объясняют температурную зависимость подвижности зарядов  $\mu = v/\mathcal{E}$ , наблюдаемую на опыте, в частности, экспоненциальный рост подвижности с уменьшением температуры в той области температур, где вклад ротонов в формуле (81.9) является подавляющим. Для положительных зарядов необходимо помнить, что теория имеет качественный характер, так как радиус носителей, равный  $7\text{Å}$ , не позволяет строго считать их макроскопическими образованиями.

## § 82. Подвижность зарядов в сильных полях или при низких температурах

В сильных полях или при низких температурах тормозящая сила тепловых возбуждений мала, и начинает играть определяющую роль новый механизм торможения, связанный с рождением кольцевых вихрей [59].

До тех пор, пока энергия носителей мала, их скорость растет с энергией по закону  $v = \sqrt{2ME}$ . При достижении

частицей некоторого критического значения энергии становится возможным рождение кольцевого вихря единичной циркуляции. Приобретаемая затем в электрическом поле энергия идет на увеличение размеров вихря, который заряд тащит с собой.

Энергия и скорость кольцевого вихря выражаются через его радиус

$$E = \rho \frac{R h^2}{2m^2} \left( L - \frac{7}{4} \right), \quad (82.1)$$

$$v = \frac{h}{4\pi m R} \left( L - \frac{1}{4} \right). \quad (82.2)$$

Здесь  $m$  — масса атома  $\text{He}^4$ ,  $L = \ln \left( \frac{8R}{a_0} \right)$ ,  $a_0$  — радиус сердцевинки вихря. Из (82.1) и (82.2) следует связь энергии вихря со скоростью

$$Ev \approx \text{const.} \quad (82.3)$$

Таким образом, при дальнейшем увеличении энергии заряда скорость его движения уменьшается. Из приведенных формул легко находим критическое (максимальное) значение скорости, при котором происходит рождение вихря, —

$$v_{\text{кр}} \approx \frac{h}{m a} \left( \frac{L^2}{4\pi} \right)^{1/2}, \quad (82.4)$$

и его радиус

$$R_{\text{кр}} \approx a \left( \frac{L}{4\pi} \right)^{1/2}. \quad (82.5)$$

Как и следовало ожидать, радиус вихря в момент возникновения оказывается порядка радиуса носителя заряда  $a$ . Для отрицательных зарядов  $v_{\text{кр}} = 11$  м/сек, для положительных  $v_{\text{кр}} \approx 28$  м/сек.

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Капица П. Л., ДАН СССР 18, № 1, 29 (1938), ЖЭТФ 11, 1 (1941); ЖЭТФ 11, 581 (1941).
- Ландау Л., ЖЭТФ 11, 592 (1941).
- Landau L., J. Physics 11, 91 (1947).
- Henshaw D., Woods A., Phys. Rev. 121, 1266 (1961).
- Feynman R., Phys. Rev. 94, 262 (1954).
- Питаевский Л., ЖЭТФ 31, 536 (1956).
- Боголюбов Н., Изв. АН СССР, сер. физ., 11, 77 (1947).
- Lee T. D., Yang C. N., Phys. Rev. 105, 1119 (1957).
- Питаевский Л., ЖЭТФ 36, 1168 (1959).
- Ландау Л., Халатников И., ЖЭТФ 19, 637 (1949); 19, 709 (1949).
- Халатников И., ЖЭТФ 20, 243 (1950).
- Халатников И., ЖЭТФ 23, 169 (1952).
- Халатников И., ЖЭТФ 23, 8 (1952).
- Халатников И., ЖЭТФ 33, 809 (1957).
- Lifschits E., J. Physics 8, 110 (1944).
- Халатников И., ЖЭТФ 23, 21 (1952).
- Atkins K. R., Phys. Rev. 113, 962 (1958).
- Халатников И., ЖЭТФ 23, 253 (1952).
- Feynman R., Progr. Low. Tempr. Phys. 1, ch. 11, North Holland Publishing Co., 1955.
- Hall H., Phyl. Mag. Sup. 9, 89 (1960).
- Кемоклидзе М., Халатников И., ЖЭТФ 46, 1677 (1961).
- Бекаревич И., Халатников И., ЖЭТФ 40, 920 (1961).
- Питаевский Л., ЖЭТФ 35, 408 (1958).
- Халатников И., ЖЭТФ 57, 489 (1969).
- Bagmatz M., Rudnica I., Phys. Rev. 170, 224 (1968).
- Tyson J., Phys. Rev. 21, 1235 (1968).
- Халатников И., Черникова Д., ЖЭТФ 49, 1957 (1965).
- Халатников И., Черникова Д., ЖЭТФ 50, 411 (1966).
- Андреев А., Халатников И., ЖЭТФ 44, 2058 (1963).
- Халатников И., ЖЭТФ 22, 687 (1952).
- Пешков В. П., ЖЭТФ 18, 857 (1948).

32. Ландау Л., Померанчук И., ДАН СССР 59, 669 (1948).
33. Померанчук И., ЖЭТФ 19, 42 (1949).
34. Халатников И., ЖЭТФ 23, 265 (1952).
35. Архипов Р., Халатников И., ЖЭТФ 33, 758 (1957).
36. Ландау Л., ЖЭТФ 30, 1058 (1956).
37. Абрикосов А. А., Халатников И., ЖЭТФ 32, 1084 (1957).
38. Brooker G. A., Sykes J., Phys. Rev. Lett. 21, 179 (1968).
39. Ландау Л., Лифшиц Е. М., Квантовая механика, Физматгиз, 1963.
40. Ландау Л., ЖЭТФ 32, 59 (1957).
41. Абрикосов А. А., Халатников И., ЖЭТФ 33, 110 (1957).
42. Абрикосов А. А., Халатников И., ЖЭТФ 34, 198 (1958).
43. Ландау Л., Лифшиц Е. М., Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, 1957.
44. Абрикосов А. А., Халатников И., ЖЭТФ 33, 1154 (1957).
45. Huang K., Yang C. N., Phys. Rev. 105, 767 (1957).
46. Lee T. D., Yang C. N., Phys. Rev. 105, 1119 (1957).
47. Ландау Л., ЖЭТФ 34, 262 (1958).
48. Питаевский Л., ЖЭТФ 37, 1794 (1959).
49. Горьков Л., Питаевский Л., ЖЭТФ 42, 600 (1962).
50. Kohn W., Luttinger J. M., Phys. Rev. Lett. 15, 524 (1965).
51. Халатников И., ЖЭТФ 35, 1919 (1968).
52. Edwards D. O., Brewer D. F., Seligman P., Skertic M., Jaqub M., Phys. Rev. Lett. 15, 773 (1965).
53. Bardeen J., Baym G., Pines D., Phys. Rev. 156, 207 (1967).
54. Anderson A. C., Roach W. R., Sarwinski R. E., Wheatly J. C., Phys. Rev. Lett. 16, 263 (1966).
55. G. Baym, Phys. Rev. Lett. 18, 71 (1967).
56. И. Померанчук, ЖЭТФ 35, 524 (1958).
57. K. R. Atkins, Phys. Rev. 116, 1339 (1959).
58. G. Kareri, V. Fasoli, F. Gaeta, Nuovo Cimento 15, 774 (1960).
59. G. N. Rayfield, F. Reif, Phys. Rev. Lett. 11, 305 (1963).

$$\text{обозначим } \mu = \alpha \bar{\sigma} = \frac{T}{c_p} - \frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial c}; \quad \beta = \frac{c}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial c}, \quad \alpha = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T}$$

первый звук

$$V_n = \frac{1 + \mu \rho_s / \rho_n}{1 - \mu} V_s$$

$$\delta P = \rho u_1 \frac{V_s}{1 - \mu}$$

$$\delta T = \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{T}{c_p} \frac{\bar{\sigma}}{u_1} \frac{\mu + \alpha \rho_n u_1^2 / \rho_s \bar{\sigma}}{1 - \mu} V_s$$

$$\delta C = \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{c}{u_1} \frac{\mu}{1 - \mu} V_s$$

$$\delta \sigma = \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\bar{\sigma}}{u_1} \frac{\mu}{1 - \mu} V_s$$

второй звук

$$V_n = -\frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{1 - \mu}{1 + \mu \rho_s / \rho_n} V_s$$

$$\delta P = \rho u_2 \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\mu}{1 + \mu \rho_s / \rho_n} V_s$$

$$\delta C = -\frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{1}{1 + \mu \rho_s / \rho_n} \frac{c}{u_2} V_s$$

$$\delta \sigma = -\frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{1}{1 + \mu \rho_s / \rho_n} \frac{\bar{\sigma}}{u_2} V_s$$

Тогда при  $\alpha = 0$

$$V_n = \frac{1 - \frac{\rho_s}{\rho_n} \beta}{1 + \beta} V_s$$

$$\delta P = \rho u_1 \frac{1}{1 + \beta} V_s$$

$$\delta T = -\frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \frac{\bar{\sigma}}{u_1} \frac{\beta}{1 + \beta} V_s$$

$$\delta C = -\frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\beta}{1 + \beta} \frac{c}{u_1} V_s$$

$$V_n = -\frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{1 + \beta}{1 - \beta \rho_s / \rho_n} V_s$$

$$\delta P = -\rho u_2 \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\beta}{1 - \beta \rho_s / \rho_n} V_s$$

$$\delta T = -\frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\partial T}{\partial \sigma} \frac{\bar{\sigma}}{u_2} \frac{1}{1 - \beta \rho_s / \rho_n} V_s$$

$$\delta C = -\frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{c}{u_2} \frac{1}{1 - \beta \rho_s / \rho_n} V_s$$

соотношения между амплитудами  
взлук в растворе  $^3\text{He} - ^4\text{He}$

$$e^{i\vec{k}\vec{r}} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i^{\ell} \sqrt{\frac{\pi}{2k r}} J_{\ell+1/2}(kr) P_{\ell}(\cos \theta)$$

$$Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = P_{\ell}^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$